電子基礎物理 試験問題 (解答/解説)

2004/12/01　　岡部 洋一

以下の各問に答えよ。(150 点満点)

1. 光の二スリット干渉実験で量子力学を検証するには、どのような実験を行えばよいか。また、その実験結果は、量子力学ではどのように説明されるか。(20 点)

   「解答」 干渉することは明らかであるので、計数性を示せるようにすればよい。光量を十分減らして光子の粒が見えるようにする。ここまで光量を減らしても、多数の光子の粒の出現頻度には波動性に基づく干渉効果が見えてくる。この実験結果より、光子は波動により決定される確率で粒子として発見される。量子力学では、この事実をそのまま表現する。つまり、確率振幅なる概念があり、これは干渉可能である。一方、観測を行うと、この確率振幅の二乗の確率で粒子的に観測される。

2. 電子のスピンについて、$+z$ 方向のスピン状態と $-z$ 方向のスピン状態を基底状態として以下の問に答えよ。

   (a) $+z$ 方向のスピン状態と $-z$ 方向のスピン状態が基底状態を構成することを式で表現せよ。(10 点)

   「解答」 正規直交性 $\langle +z|+z\rangle = 1, \langle +z|-z\rangle = 0, \langle -z|+z\rangle = 0, \langle -z|-z\rangle = 1$ が成立することと、完備性 $|+z\rangle\langle +z| + |-z\rangle\langle -z| = \widehat{I}$ が成立すること。

   (b) $+x$ 方向のスピンを z 方向のスピン分析器に入れるとどのような観測結果が得られるか。その結果を説明するもっとも簡単な $+x$ 状態の表現法を示せ。(10 点)

   「解答」 $+z$ 状態に 50%、$-z$ 状態に 50% の確率で観測される。$P(+x \to +z) = P(+x \to -z) = 1/2$ より、$|\langle +z|+x\rangle| = 1/\sqrt{2}$、$|\langle -z|+x\rangle| = 1/\sqrt{2}$、が得られる。もっとも簡単な表現は $\langle +z|+x\rangle = 1/\sqrt{2}$、$\langle -z|+x\rangle = 1/\sqrt{2}$。あるいはベクトルで表現すると $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$。

   (c) $+x$ 状態は決して $-x$ 状態ではない。この事実を利用して $-x$ 状態を表現せよ。(10 点)

   「解答」 $P(-x \to +z) = P(-x \to -z) = 1/2$ より、$|\langle +z|-x\rangle| = 1/\sqrt{2}$、$|\langle -z|-x\rangle| = 1/\sqrt{2}$ が得られる。一方、$\langle +x|-x\rangle = 0$ である。$+x$ 状態のベクトル表現を見て、それと直交するもっとも簡単な解は、$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$。ブラケットで表現すれば、$\langle +z|-x\rangle = 1/\sqrt{2}$、$\langle -z|-x\rangle = -1/\sqrt{2}$。

   (d) $+x$ 状態と $-x$ 状態が基底状態を構成することを示せ。(10 点)

   「解答」 正規直交性 $\langle +x|+x\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$。
   $\langle +x|-x\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/2 - 1/2 = 0$ (残り二式も同様なので省略) が成立する。また完備性も $|+x\rangle\langle +x| + |-x\rangle\langle -x| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるので、別の一組の基底状態を構成する。

   (e) 同様な考察により、$+y$ 状態はどのような表現されるか。(15 点)

   「解答」$P(+y \to +z) = P(+y \to -z) = 1/2$ より、$|\langle +z|+y\rangle| = 1/\sqrt{2}$、$|\langle -z|+y\rangle| = 1/\sqrt{2}$。これより、$\langle +z|+y\rangle = 1/\sqrt{2}$ としよう。$|w| = 1$ なる w を利用して、$\langle -z|+y\rangle = w/\sqrt{2}$ としておこう。ベクトルで表現すると $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ w/\sqrt{2} \end{pmatrix}$。同様に $P(+y \to +x) = P(+y \to -x) = 1/2$ であろうから、これより $|\langle +x|+y\rangle| = 1/\sqrt{2}$、$|\langle -x|+y\rangle| = 1/\sqrt{2}$、前式左辺をベクトルで記載すると、$\left| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & w/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right| = (1/2)|1 + w|$。これが $1/\sqrt{2}$ でなければならないから、$|1 + w| = \sqrt{2}$。したがって、$w = \pm i$ となり、$+y$ 状態は $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ と書ける。なお、この符号は別の実験を行わないと決まらない。

(f) さらに、$-y$ 状態はどのような表現されるか。(10 点)

「解答」 $+y$ 状態のベクトルとの直交性より、$-y$ 状態のベクトル表現は $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \mp i1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$。

3. 一次元連続空間中の井戸型ポテンシャル中の粒子の量子状態を解け。ただし、$-L/2 < x < L/2$ ではポテンシャルは $V = 0$、それ以外の空間では $V = V_0$ とする。

(a) 波動関数 (確率密度振幅) を $\Psi(x,t)$ として、区間 $-L/2 < x < L/2$ で成立するシュレディンガー方程式を示せ。また定常状態 $\Psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ を仮定し、この式を書き直せ。(10 点)

「解答」 $ih\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$。定常状態に対しては $E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)$。

(b) 定常状態に対し、まず片方の壁のところで考えよう。$E > 0$ のとき、波動関数は井戸の中でどうなり、井戸の外でどのようになるか、定性的に答えよ。また解が無限遠で発散しない条件から、壁の位置における $\Psi(x)$ と $\Psi'(x)$ に関係が生じてくる。この関係を求めよ。さらに、外部のポテンシャル V_0 が十分高いときには、壁の位置とその外で $\Psi(x)$ は限りなく 0 となることを示せ。(15 点)

「解答」 井戸の中では指数が $\pm i\sqrt{2mE}/\hbar$ となるため正弦波関数、井戸の外では $\pm\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ となるため指数関数となる。解が無限遠で発散しないためには、左の外では $\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ を指数とする指数関数のみ生き残る。つまり $\Psi(x) = A\exp(\sqrt{2m(V_0 - E)}x/\hbar)$ で表わされる。一方、この微分は $\Psi'(x) = A(\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar)\exp(\sqrt{2m(V_0 - E)}x/\hbar)$ となるので、$\Psi'(x) = A(\sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar)\Psi(x)$ が成立する。$V_0 \to \infty$ とすると、有限の $\Psi'(x)$ に対し、$\Psi(x) \to 0$ が得られる。井戸の内の正弦波関数はこの $\Psi'(x)$ と $\Psi(x)$ に左壁で連続的に接続しなければならないが、$\Psi'(x)$ は有限であるので、$\Psi(x) = 0$ としてよい。右の外では減衰型指数関数となるが、右壁での結論は同じ。

(c) 前問の条件で両側の壁の影響を考えると、波動関数には強い制約がでてくる。この制約を満すような波動関数の形と、対応するエネルギー E を求めよ。(15 点)

「解答」波動関数は、井戸内では両側の壁で 0 となる (勾配は自由な) 正弦波関数 (外は 0) なので、n を正整数として、$A\sin(n\pi(x+L/2)/L)$ となる。角波数 k が $n\pi/L$ であることから、$E = (\hbar k)^2/2m = (n\pi\hbar/L)^2/2m$。$n = 0$ は正規化できないので除外。

(d) 最低エネルギー状態の粒子発見確率の空間分布を示せ。(10 点)

「解答」 前問の解で $n = 1$ として、$A\sin(\pi(x + L/2)/L)$。これより $P(x) = A^2\sin^2(\pi(x + L/2)/L)$ となり、中央での確率の高い分布となる。正規化すると $A^2 = 2/L$ が得られる。図は略す。

(e) 最低エネルギー状態と次のエネルギー状態の混合状態を考えると運動が見えてくる。時間と共に粒子発見確率の空間分布がどう変化するか、代表的ないくつかの時点における図を示せ。(15 点)

「解答」 前問の波動関数を $\exp(-iE_1t/\hbar)/\sqrt{2}$ 倍、$A\sin(2\pi(x + L/2)/L)$ を $\exp(-iE_2t/\hbar)/\sqrt{2}$ 倍にして加える。ただし、$E_1 = (\pi\hbar/L)^2/2m$、$E_2 = 4(\pi\hbar/L)^2/2m$ である。二つの周波数が異なるため、両者の位相は徐々にずれていく。位相差が 0 のときには $P(x) = |A\sin(\pi(x + L/2)/L + A\sin(2\pi(x + L/2)/L|^2/2$ となるが、こうしたグラフは sin の中が $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ といった典型的な値に対して概略の数値を求めればよいが、その結果、井戸の左の方では大きな値、右の方では小さな値となる。つまり左にピークの寄った山となる。位相差が $\pm\pi/2$ のときには、後者が i 倍で加算される。数値を求めると、$-L/4 < x < L/4$ でおよそ一定の山となる。より正確には左右が中央よりやや高くなっている。位相差が $\pm\pi$ のときには、位相差 0 の解と左右対称の右が高く左が低い山となる。なおいずれの場合でも真中は $1/L$ となる。時間順にタイムショットを説明すると、最初は左高右低の山で、時間の経過と共に左の高さが下ってきて右が上がってくる。やがて左右が中央よりやや高いほぼ同じ高さになる。さらに時間が経過すると右高左低の山となり、再び左右同じ高さの状態を経由して、元の状態へ戻る。つまり、電子は左右に振動しているかに見える。この問はかなり表現の難しい問題なので、やや不完全な記載でも満点とする。