電子基礎物理 試験問題 (解答/解説)

2005/12/07　　岡部 洋一

以下の各問に答えよ。(100 点満点)

1. 偏光について次の各問に答えよ。(30 点)

   (a) x 偏光状態と y 偏光状態が基底状態を構成することを式で表現せよ。(10 点)

   [解答] (正規直交性) $\langle x|x\rangle = 1$, $\langle x|y\rangle = 0$, $\langle y|x\rangle = 0$, $\langle y|y\rangle = 1$
   (完備性) $|x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y| = \hat{I}$

   (b) 45° 偏光板の後に x 偏光と y 偏光に分ける分解器を置き、さらにその後にそれぞれ極めて感度のよい光検出器を置いた。この装置に十分弱い光を入射した際、光は検出器でどように観測されるか。量子力学に知見に基づいて回答せよ。(10 点)

   [解答] (観測確率はいずれも $\cos^2 45° = 1/2$ で 50% ずつ。) 両検出器共 45° 偏光板の後で直接観測するのに対して 50% の頻度で、まったくランダムに光を計数する。

   (c) x 偏光板の後に y 偏光板を置いた。その後、間に 45° 偏光板を入れた。この二つの実験結果はどのようになるであろうか。式を用いて、結果を示せ。(10 点)

   [解答] 前者では $\langle y|x\rangle = 0$ より、まったく光は観測できない。
   後者では $\langle y|45°\rangle\langle 45°|x\rangle = (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 1/2$ より、光が 25% の確率で検出される。

2. 電子のスピンについて次の各問に答えよ。(60 点)

   (a) $+z$ 方向と $-z$ 方向のスピン状態が基底状態を構成することを式で表現せよ。(10 点)

   [解答] (正規直交性) $\langle +z|+z\rangle = 1$, $\langle +z|-z\rangle = 0$, $\langle -z|+z\rangle = 0$, $\langle -z|-z\rangle = 1$
   (完備性) $|+z\rangle\langle +z| + |-z\rangle\langle -z| = \hat{I}$

   (b) $+x$ 方向のスピンを z 方向のスピン分析器で分析するとどのような結果が得られるか。その結果より $+x$ 状態を表わすもっとも簡単なベクトル形式を示せ。(10 点)

   [解答] $+z$ 状態も $-z$ 状態も、$+x$ 状態からそれぞれ対称な位置にある状態なので、とる確率は 50% ずつ。したがってもっとも簡単な表現は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $+x$ 状態は決して $-x$ 状態をとらない。このことから $-x$ 状態をベクトル形式で表現せよ。(10 点)

   [解答] $\langle +x|-x\rangle = 0$ より $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (d) x 軸に沿って一様な磁界 $+B$ をかける。すると $+x$ 状態は μB、$-x$ 状態は $-\mu B$ のエネルギーをとる定常状態になることが知られている。このシステムのハミルトニアンを行列の形で示せ。(10 点)

   (ヒント) 行列のエルミート変換を利用する。その方法を知らなければ、ハミルトニアンを最小限の未知数の行列で表し、固有値問題の解法の逆を行う。

   [解答] ヒントの後者の方法で解いてみよう。
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $a - \mu B + b = 0$ および $c + d - \mu B = 0$。

同様に、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $a+\mu B-b=0$ および $c-d-\mu B=0$。
これらより $a=0$、$b=\mu B$、$c=\mu B$、$d=0$。
したがって、$\hat{H}$ を行列で表わすと $\mu B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) 運動方程式を示し、定常状態を解いてみよう。(10 点)

[解答] 運動方程式は $\psi_{+z}(t) = \langle +z|\psi(t)\rangle$ などとして
$i\hbar(d\psi_{+z}(t)/dt) = \mu B\psi_{-z}(t)$ および $i\hbar(d\psi_{-z}(t)/dt) = \mu B\psi_{+z}(t)$
これらの和から、$\psi_{+z}(t) + \psi_{-z}(t) = a\exp(\mu Bt/i\hbar)$
これらの差から、$\psi_{+z}(t) - \psi_{-z}(t) = b\exp(-\mu Bt/i\hbar)$
これらの解の和と差をとれば、$\psi_{+z}(t)$ と $\psi_{-z}(t)$ が得られる。

(f) $t=0$ で初期状態が $+z$ 状態だったとすると、その後の運動の結果はどうなるか。解を示し、略図を描け。(10 点)

[解答] $t=0$ で $\psi_{+z}(t)=1$、$\psi_{-z}(t)=0$ であるから、前問の最後の二式より $a=b=1$ としてよい。したがって、$\psi_{+z}(t)=\cos(\mu Bt/\hbar)$、$\psi_{-z}(t)=i\sin(\mu Bt/\hbar)$
これらの二乗をとると、$P_{+z}(t)$ と $P_{-z}(t)$ が得られる。図は略すが、前者は 1 から始まり、1〜0 を波状に変化し、後者は 0 から始まり、丁度逆の波形で変化し、合計は常に 1 となる (授業でも述べたように、これは $+x$ を軸とする歳差運動になっている)。

3. 微分方程式は行列の問題に書換えが可能である。位置を基底状態として、例えば、d^2/dx^2 はどのような行列で表現できるだろうか。(10 点)

[解答] 空間を有限長 Δx で分割する。すると
$d^2f/dx^2 = [f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)]/\Delta x^2$
と書けるから、これをそのまま行列で表現すると

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

これは周期型境界条件の場合であるが、開放型の境界条件の場合には右上と左下の 1 は 0 となる。中 3 列の 1、-2、1 ができていれば満点。