

# ファラデーの力線とマクスウェル応力

岡 部 洋 一

## 1. ファラデーとマクスウェル

マクスウェル応力と関連する言葉としてファラデーの力線、力管という概念がある。電気力線や磁力線はその方向に引張力があり、それと垂直な方向に圧縮力を持つという概念である。ファラデーは1831年の電磁誘導の発見の前後ぐらいから磁力線という概念を持ち出したようで、電磁誘導は導体が磁力線を切ることで発生するなどと言っている<sup>1)</sup>。

マクスウェルは電磁誘導発見の年、1831年に生まれているが、ファラデーの電磁気学における諸実験、諸論文に大きく影響を受け、1855年に「ファラデー力線」を執筆し、ファラデーにも献本している<sup>2)</sup>。

このように、マクスウェル応力とファラデーの力線、力管は切っても切れない縁で結び付いているのである。なお、ファラデーは実験とそれに基づく直観からなる科学者であり、マクスウェルはそうした結果を矛盾なく、数学を駆使して理論的に裏付ける科学者であり、これら二人のよい組合せが中核となって、電磁気学の整備が急速になされたといっても過言ではなからう。

## 2. 電気力線

空間に分布した電荷は、各電荷ごとに放射状の

電場<sup>\*1)</sup>  $E$  を生成する。こうした中に別の電荷（以下、検電荷という）を置くと、各電荷の作る電場をベクトル的に合成した電場ベクトルに検電荷の電気量を乗じた大きさの力を受ける。この際、合成された電場ベクトルを図示すると、空間の中で、その方向や大きさは徐々に変化しており、あたかも一つの流れのようなイメージを構成している。この流線を電気力線と呼ぶ。

電気力線は正電荷から発生し、負電荷で消え失せる。力線の発生が、各電荷の電気量に比例するものとし、かつ、点電荷はその周辺のあらゆる方向に均等<sup>\*2)</sup> に力線を出すものとする。全空間の正負の電荷の総量が0でないときには、余った力線は無遠慮へ発散、もしくは無遠慮から収束してきて、辻褄が合うことになる。

図1のように、外部電場のある空間に検電荷を置いた場合、外部電場に検電荷の作る電場も重ねてみよう。検電荷がある程度の大きさを持つものとする、検電荷は四方八方に均等な電場を形成するが、元々の外部電場の影響で、その周辺の力線には分布の偏りが生じる。検電荷の表面での力線密度を見ると、電場の下流側の密度が高くなり、上流側の密度が下がるのである。検電荷の受ける力は電場の方向であるので、あたかも力線に引

\*1) 理学系では電場と呼ぶが、工学系では電界という。本稿では電場とする。

\*2) 電荷が小数值の場合とか、球の表面に等間隔で力線を置く具体的な方法があるかなど、作業しようとするとき細い困難が発生するが、概念的な描像を持ってほしい。

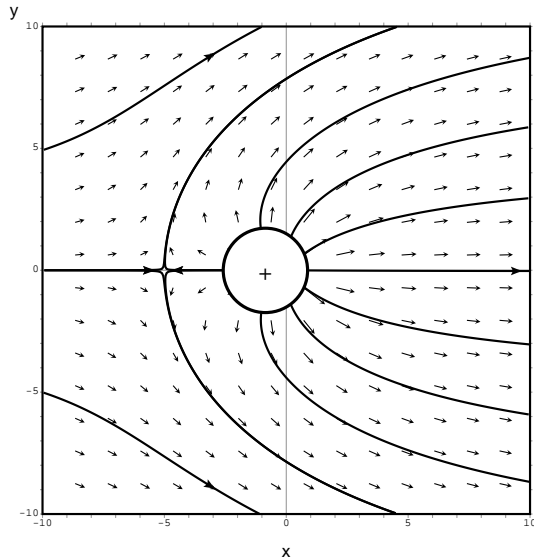


図1 一様な電場中（右向き）に置かれた検電荷（正）は、電気力線の引張力により、総体として右向きの力を受ける

張られるようなイメージが持てるのである。検電荷の電気量が負の場合には、電場の上流方向の密度が高くなるため、やはり力線に引っ張られるようなイメージが持てる。これが、ファラデーの持った力線概念であり、ファラデーは力線があると、力線はその方向に引張力を持っているとしたのである。

この引張力の大きさは導体表面に働く静電力から推定することができる。表面電荷密度を  $\sigma$  とすると、この表面の法線方向に  $E = |\mathbf{E}|$  の大きさの電場が発生する。実はこの計算はやや乱暴である。というのは、電場の強さは表面では  $E$  であるが、内側で急速に減衰して0になるからである。厳密な計算をしてみると、表面付近の電荷は平均として  $E/2$  の電場を感じることになる。ガウスの法則から、電気定数を  $\epsilon_0$  として  $\sigma = \epsilon_0 E$  であるので、結局、引張力の大きさは  $\epsilon_0 E^2/2$  となる。導体表面ではこの値になるが、ファラデーは真空内の任意の点で、力線はその方向に  $\epsilon_0 E^2/2$  なる引張力を持つと仮定したのである。 $E$  はその地点での電場の強さである。

一般的に、電荷にかかる力を計算するには、そ

の電荷を取り去り、その地点の電場  $E$  を計算してから、取り去った電荷の電気量  $Q$  を掛けて  $QE$  を計算する。それが検電荷という概念を導入した理由である。しかし、ファラデーの引張力による計算では、電荷にかかる力は、その電荷を置いたまま、周辺の電場を計算するだけで得ることができるという利点を持っている。ただし、点電荷の場合には、有限のサイズの電荷に対する作業をしてから、その形状を無限に小さくするという作業をしなければならない。

ファラデーは、力線はその垂直方向に**圧縮力**（以下、本稿では**側圧**と表現する）を持っており、その値も単位面積あたり  $\epsilon_0 E^2/2$  であるとも言っている。線が圧縮力を持つというのはいまいちなので、何本かの力線を細く囲む管を想定し、その管状のものが、力線方向には縮もうとし、その垂直方向には拡がろうとするというイメージで表現した。この力線の集合である管状のものをファラデーの**力管**という。つまり、力管は長さ方向に縮もうとし、断面を拡げる方向に拡がろうとするというイメージである。こうしたファラデーの直観により導かれた力管概念が、後にマクスウェルによって理論的に裏付けられるのである。

### 3. 磁力線と磁束線

さて、検電荷にかかる力から、力管が長さ方向に引張力を持ちそうなことはまだ何とか理解できるが、それと垂直な方向の力についてにまで、ファラデーがどうして直観を持てたのかは、あまりよくわからない。筆者の推定であるが、ファラデーはどちらかというと、磁場および電磁誘導に関する研究者であるため、磁力線から思い付いたのではないか。また、1820年、エールステッドが電流が磁場を発生すること、また同年アンペールが電流間の力を定式化したことから、磁力線と磁石の関係のみならず、磁力線と電流の関係にも関心を持ったからではないか。そしてファラデーは、まず磁場に対し磁力線の有する力のことを推定し、それを電場に適用することにより電気力線を推定

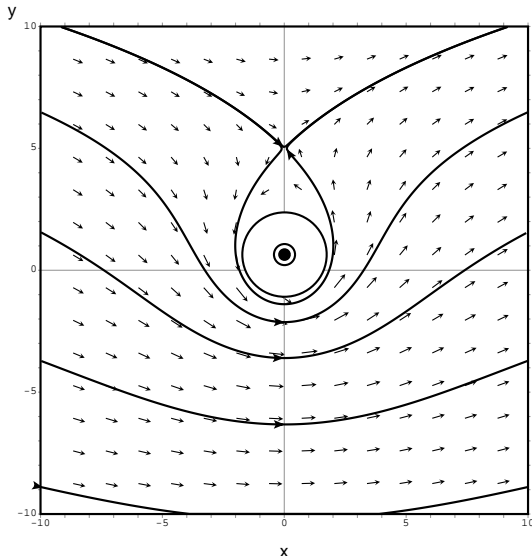


図2 一様な磁場中（右向き）に置かれた検電流（手前向き）は、周辺の磁力線の側圧により総体として上向きの力を受ける

したのではないかと感じる。

当時、磁石から発生する磁場は、磁石には磁荷があり、それが電荷の作る電場のように磁場  $H$  を作ると考えられていた。したがって、磁荷と磁力線とは、電荷と電気力線とまったく同様な関係が成立する。ファラデーは、この磁荷にかかる力も、磁力線の持つ引張力  $\mu_0 H^2/2$  で説明したのである。 $\mu_0$  は磁気定数である。ところが、エールステッド、アンペールの発見により、電流も磁場を作り、また磁場から力を得ることがわかってしまったのである。電流の作る磁場は電流を回るように発生し、電流のある地点に始点や終点を持たない。したがって、磁力線の引張力だけではどうやっても、電流に力が働くことが説明できないのである。

ところで、一様な磁場中に検電流を置き、その作る磁場を重ね、磁力線を描いてみると、図2のようになる。この図の場合、 $F = J \times B$  の式、もしくはフレミングの左手の法則より、電流は上向きの力を受けるはずである。これを磁力線を含む磁力管の膨らむ力によるとすると、同じ方向の力となるのである。つまり、ファラデーは、磁荷に対してはそこから磁力線が発生消滅するため、

力管の長手方向の引張力による力が働き、電流に対しては、力管の断面方向の側圧による力が働くと考えたのではないかと私は推察している。しかも側圧を  $\mu_0 H^2/2$  とすると電流に働く力が正しく得られるのである。

なお、現在は磁石も微小電流の集合ででき上がっているということがわかり、磁荷という概念は使われなくなっている。微小電流の集合は、磁石の最表面を流れる電流とほぼ等価であることが知られているので、磁石の磁極を除く側面の表面を環状に流れるソレノイド状の電流<sup>\*3)</sup>に置き換えられる。電流が生成するのは磁束密度  $B$  であるが、真空中では磁束密度は磁場のちょうど  $\mu_0$  倍になるだけなので、磁束線の側圧は  $B^2/(2\mu_0)$  であるということになる。

磁石を磁荷ではなく、表面電流で表現した場合の磁石に働く力の計算はちょっと面倒である。図は省くが<sup>\*4)</sup>、まず、外部磁場のかかっていない場合の磁束線を見てみると、磁石の側面に内側と外側から圧縮力がかかる。内側のほうが磁束密度が高いため、合計すると、側面を膨らますような力である。一方、筒の磁極付近の端を見ると、磁束線はこの端付近で曲っており、その側圧で磁石を縮める方向の圧縮力を発生する。つまり、外部磁場がなくても、磁石は自身の発生する磁束により、側面には径を拡げる力、磁極付近には軸を縮める力を受けていることになる。これに外部磁場を加えると、N極が外部磁場の下流にある場合、その極の端付近の磁場は多少緩むため、N極付近の電流にかかる圧縮力は低下する。同様に、S極が上流にある場合、やはりその付近の磁場は緩んで、S極付近の電流にかかる圧縮力は低下する。つまり、外部磁場のないときに比べ、N極は下流方向の、S極は上流方向の差の力を感じるようになる。これらの値と方向が、磁荷を仮定して計算した結果と一致するのである。

\*3) やや細かい議論となるが、ソレノイドの場合にはどこでも変わらない一定の面電流密度を持つが、磁石の場合には、外部磁束がかかった場合ですら、筒内の内部磁束が一定になるように電流分布のほうが変化する。

\*4) 読者の課題としておこう。

#### 4. マクスウェル応力

ファラデーの力管の仮説は、その後、マクスウェルにより理論的に検証される。その誘導を示そう<sup>3)</sup>。なお、真空中に電荷や電流があるだけで、誘電体や磁性体といった物質のない場合を考慮しよう。突然、式が出てきて難しくなるが、これらの式の誘導を細部にわたって理解せよと言っているのではない。学んでほしいのは、前提となる式と、結論の式である。

力の計算をするのであるが、点電荷や線状電流に働く力はローレンツ力の式から得られる。しかし、図1や図2に見られるように、電荷や電流が拡がって分布していないと、ファラデーの力管の力は計算できない。分布した電荷密度  $\rho$  や電流密度  $\mathbf{J}$  に働くローレンツ力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1) \end{aligned}$$

この右辺  $\rho$  と  $\mathbf{J}$  を、マクスウェル方程式の二つの式

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \quad (2)$$

および

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

を利用して、電磁場により書き換え、式変形を続けていく。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{E}(\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}) \\ &\quad - \mathbf{B} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) + \varepsilon_0 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ &\quad + \varepsilon_0 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{i} \left\{ \varepsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right] \right\} \\ &\quad + \mathbf{j} \{ \dots \} + \mathbf{k} \{ \dots \} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{i} \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x_i} + \mathbf{j} \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial x_i} + \mathbf{k} \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{g}_{\text{em}}}{\partial t} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで三番目の等号では、

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

に左から  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  の外積をとったものと、

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

に左から  $\mathbf{B}/\mu_0$  の内積をとったものを利用して。これらもマクスウェル方程式の残る二つの式である。また、 $T_{ij}$  と  $\mathbf{g}_{\text{em}}$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \varepsilon_0 \left( E_i E_j - \delta_{ij} \frac{E^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{B^2}{2} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (8)$$

である。ここで、テンソル (行列)  $T_{ij}$  はマクスウェル応力テンソル、 $\mathbf{g}_{\text{em}}$  は電磁場の運動量と呼ばれている。なお、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタで、次式で定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (9)$$

ここまでの誘導を復習すると、ローレンツ力の式と4本のマクスウェル方程式しか使っていないことに着目して欲しい。

さて式 (4) は元々分布電荷 (および分布電流) に働くローレンツ力であり、分布電荷の持つ単位

体積当たりの力学的運動量  $\mathbf{g}_k$  の増加率ともいえるので、以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_{em}}{\partial t} \quad (10)$$

$\mathbf{T}$  がテンソルであるため、 $\nabla \cdot$  は grad でも div でもないことに注意してほしい。 $\nabla \cdot \mathbf{T}$  の本当の意味を理解するためには、成分展開の式に立ち返るべきである。この式の両辺をある体積で体積積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV (\mathbf{g}_k + \mathbf{g}_{em}) = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad (11)$$

これから、マクスウェル応力が運動量の増加を引き起こすことがわかるが、運動量には  $\mathbf{g}_{em}$  なる電磁場の運動量を含んでいることを理解してほしい。

**応力**という苦手な人が多いかとも思うが、要は、空間に小さな直方体を切り取ったときに、 $yz$  面に働く力が  $(T_{xx}, T_{yx}, T_{zx})$  になると理解すればよい。例えば  $T_{xx}$  が正のときは引張力、負のときには圧縮力に定義される。それにしても  $\mathbf{T}$  の要素が複雑である。こうしたときには、この行列の固有値問題を解いて、主軸変換するとよい。

まず、静電場とか静磁場といった静的な場合を考察する。式 (7) の第 1 行の電場に関わる項のテンソルを主軸変換してみよう。すると、主軸は  $\mathbf{E}$  の方向にあり、その方向の固有値は  $\varepsilon_0 E^2/2$  となる。また、第二、第三の主軸はこれと直交しており、その方向の固有値は縮退していて、 $-\varepsilon_0 E^2/2$  となる。これから、 $\mathbf{E}$  の方向に垂直の面は  $\varepsilon_0 E^2/2$  の引張力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も  $\varepsilon_0 E^2/2$  の圧縮力を受けることがわかる。この理由により、電気力線はその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すことになり、ファラデーの仮説が立証されたことになる。

第 2 節の電気力線のところでも述べたように、例えば、導体上の電荷は常に外向きに引力を受けるのは電気力線の引張力で理解できることとなる。また、導体表面で、同種の電荷同士は横向きに押し合っており、それが故に、電荷は一様に分布するのであるが、それが電気力線の横向きの圧縮力に繋がるのである。

続いて、式 (7) の第 2 行の磁束に関わる項のテンソルを主軸変換すると、電場の場合と同様に、 $\mathbf{B}$  の方向に垂直の面は  $B^2/2\mu_0$  の引張力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も  $B^2/2\mu_0$  の圧縮力を受けることがわかる。この理由により、磁束線もその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すのである。

これも第 3 節の磁束線のところで述べたように、電流に働く力は、磁力線に垂直な圧縮力で説明できることになる。例えば、同方向に流れる電流同士が互いに引かれる様子は、これらで作る磁力線が電流の線の間で疎であり、外部で密であることから、視覚的に理解できる。

式 (7) の電場と磁束の両項を加えたときの主軸変換は、きれいな形にはならない。しかし静的な場合には、電荷は電気力線としか関わらず、電流は磁力線としか関わらないので、それぞれ独立な応力により理解できる。

次に、動的な場合を考察しよう。この場合には、 $\mathbf{g}_{em}$  の時間微分が効いてくるため、電荷や電流に働く力はマクスウェル応力だけでは説明できなくなる。式 (11) の積分の体積をきわめて巨大にしていくと、遠方では場が弱くなっていくため、右辺の応力の表面積分の項は消えていくだろう。残った左辺の項は、力学的運動量と電磁場の運動量の時間微分に関わるものである。通常は、力学的運動量の体積積分は、作用・反作用の法則で 0 になることが期待できるが、そうはなっていない。つまり、作用・反作用の法則は成立しないのである。その差は、 $\mathbf{g}_{em}$  の時間微分により説明できるのである。この作用・反作用の法則の不成立に関して、電磁気学ではきわめて多くのパラドックスが提示されている。しかし、そのすべてが、この電磁場の運動量を考慮することにより、理解できることを知ってほしい。

## 5. 物質中のマクスウェル応力

誘電率  $\varepsilon$  や透磁率  $\mu$  の一様な物質がある場合、マクスウェル方程式の  $\varepsilon_0, \mu_0$  は、すべて  $\varepsilon, \mu$  に

置き換わる。ただし、自由電荷、自由電流にかかる力は式 (1) のまま変わらない。したがって、マクスウェル応力テンソル  $T_{ij}$  および電磁場の運動量  $\mathbf{g}_{em}$  は、式 (7) と式 (8) で  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$ 、 $\mu_0 \rightarrow \mu$  としたものに置き換わる。

物質の誘電現象や磁化現象は、分極や磁化といった微視的力学的変形を物質中に生成する。例えば、分極とは、物質中にほぼ均等に存在する正電荷と負電荷の重心をずらす現象であり、一種の弾性現象である。ここに示したマクスウェル応力を利用して電磁場の力を議論すると、力学的変形を含んだ結果が得られ、純粋な電磁場の力は得られない。

例えば、電場に平行に置かれた誘電体表面付近では、 $\mathbf{E}$  は誘電体内と誘電体外部である真空ではほぼ同じであるので、応力は  $\varepsilon E^2/2$  と  $\varepsilon_0 E^2/2$  と異なる。しかし、その違いは、実は力学的応力の差であり、電磁氣的応力は同じである。平行平板キャパシタの中に誘電体が引き込まれる効果を説明するのに、しばしば、電気力線の横方向の圧縮力の結果であると記載した書が多く見られるが、それは間違いである。そもそも電気力線が物質に側圧をおよぼすとしたら、そこには何らかの議論が必要となる。ただし、仮想変位の原理を利用して引き込み力を計算することは可能である。

こうした間違いを起ささないためには、**自由電荷**や**自由電流**に加え**分極電荷**や**磁化電流**をも含むすべての**全電荷**、**全電流**に対して計算したマクスウェル応力を使うのがよい。電荷や電流として、物質中に誘起される電荷や電流も含むことにすれば、これらは、真空中に存在しているのと同じになるので、先に示した物質のない場合の取り扱いと同じになる。つまり、 $\rho$  や  $\mathbf{J}$  を全電荷、全電流と思えばよいだけである。その結果、誘電体や磁性体に働く力は、式 (7) と式 (8) のマクスウェル応力と電磁場の運動量を使って計算することが可能となる。

例えば、誘電体の表面に分極電荷が誘起されていると、電気力線が不連続、つまり  $E_n$  が不連続になることが知られているが、この結果、 $\Delta(E_n^2/2)$  なる力が誘電体表面に働くことが誘導できる。ま

た、平行平板キャパシタの中に誘電体が中途まで入っている場合には、この誘電体の先端付近での圧縮力は、内外とも  $\varepsilon_0 E^2/2$  であり、先端を引き込むような応力は発生しない。ちなみに、この場合、実際に誘電体が引き込まれるのであるが、それは誘電体の角付近のエッジ効果による<sup>3)</sup>。

## 6. エーテルの存在

応力は、通常、何らかの物体が伝達する。この応力を伝える媒質として**エーテル**という仮想的な物体が仮定された。実際、電荷や電流が突然動いたとすると、その影響はあたかも音波が空中を伝わっていくように、光速で伝わっていく。このように影響がエーテルの隣接点に次から次へ伝わっていくことから、電磁場による力は**近接力**であるとされたのである。

**特殊相対性理論**が提唱され、エーテル仮説はかえりみられなくなった。しかし、力の伝播を理解する上でエーテルのような仮想媒質を思い描くことは、電磁気学の理解にとっては便利である。さらに、ここには電磁場の運動量やエネルギーさえ存在する。ますますエーテルは便利な仮説である。それをあっさり捨ててしまったのは若干残念な気がする。エーテルも相対性理論に従う媒質であり、たまたま、そこに存在する波動が光速で伝播するため、波動の速度が不変になるという立場をとることも、今なら可能なような気がする。

改めて、ファラデーのような直観による仮説が、マクスウェルのような厳密な解析により、示されたのは、実に素晴らしいことであつたことを再度強調して本稿のむすびとしたい。

## 参考文献

- 1) 愛知敬一, “ファラデーの伝—電気学の泰斗”, [http://www.aozora.gr.jp/cards/001234/files/46340\\_24939.html](http://www.aozora.gr.jp/cards/001234/files/46340_24939.html), 1923
- 2) 佐々木 梗, “ジェームズ・クラーク・マクスウェルの生涯”, <http://home.e01.itscom.net/ikasas/jcm/jcmtop.htm>, 2010
- 3) 岡部 洋一, “電磁気学の意味と考え方”, 講談社, p. 171, 2008

(おかべ・よういち, 放送大学)