

電磁気学の実験と方程式

岡部 洋一

1. マクスウェルの方程式

電磁気学の面白いところは、各種の物理現象から得られた方程式から、逆に当時まだ知られていない物理現象が予測され実験により確認された点にある。各種物理現象とは、クーロンの法則、磁荷のクーロンの法則（あるいはビオ・サバールの法則）、ファラデーの法則、電流連続の法則であり、得られた方程式とはマクスウェルの4本の方程式のことで、予測された物理現象とは電磁波である。

電磁気学の基本には、荷電粒子の受ける力は他の粒子の作る場によって決定されること、場にはベクトルとしての加法性が成立すること、がある。後者は、**重畳の原理**と呼ばれる。また、場により今着目している荷電粒子（検電荷と呼ばれる）が受ける力 F は、静止していても感じる**電場 E** と、動いていないと感じない**磁場 B** とからなる。

$$F = Q(E + B \times v). \quad (1)$$

他の荷電粒子が作る電場 E は**クーロンの法則**で記述できる。これを任意の閉曲面上で内積面積分すると次式が得られる。

$$\oint dS \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV \rho. \quad (2)$$

ρ は電荷密度であり、右辺はこの閉曲面に含まれる総電気量となる。 ϵ_0 は**電気定数**と呼ばれる定数である。また、荷電粒子を含む任意の閉曲面上で

外積面積分する、もしくは任意の閉曲線上で内積線積分すると、次式が得られる。

$$\oint dS \times E = 0 \quad \text{または} \quad \oint ds \cdot E = 0. \quad (3)$$

なお、これら二つの式は等価である。

次に、微小な環状電流の作る磁場 B は、これを等価な磁気双極子と置き換えることにより、磁荷の作る**磁気クーロンの法則**より導き出すことができる。これを、電流を一部含む任意の閉曲面上で外積面積分する、もしくは任意の閉曲線上で内積線積分すると、次式が得られる。

$$\oint dS \times B = \mu_0 \int dv J \quad \text{または} \\ \oint ds \cdot B = \int dS \cdot J. \quad (4)$$

J は電流密度、 μ_0 は**磁気定数**と呼ばれる定数である。一方、これを任意の閉曲面上で内積面積分すると次式が得られる。

$$\oint dS \cdot B = 0. \quad (5)$$

これら式4および5は**ビオ・サバールの式**からも得ることができる。

以上は荷電粒子や電流が変化しない静的な式であるが、電荷や電流が変化したり場が変化すると、これらを変更する必要が出てくる。まずは**ファラデーの電磁誘導の法則**である。これは、磁場が変化するとそれが電場を誘導するというものである。

誘導される電場は次式を満たす。

$$\oint d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int dv \mathbf{B} \quad \text{または}$$

$$\oint ds \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \quad (6)$$

つまり、式3は変更を受けることになる。

これらの式2、6、4、5の面積分の対象である閉曲面の体積を極めて小さい領域 Δv とすると、

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v} \frac{1}{\Delta v} \oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}, \quad (7)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v} \frac{1}{\Delta v} \oint d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \quad (8)$$

と定義されているため、次式の微分形が得られる。

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (12)$$

これがマクスウェルの当初に導いた式である。

しかし、マクスウェルはここに一つの矛盾を発見する。それは**電流連続の式**との不整合性である。電流連続の式とは、ある閉曲面から電流が流れ出ると、その分、その閉曲面内の電荷が減少するというものである。

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int dv \rho. \quad (13)$$

この右辺を移項し、閉曲面の体積を十分小さくすると、次式の微分形が得られる。

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

ここで、式12の div を計算すると、一般に $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$ が成立するため、 $\text{div } \mathbf{J} = 0$ が誘導される。これと、式14は明らかに矛盾するのである。そこでマクスウェルは、式12の右辺に式14の第2項に対応する補正項を追加した。式9を用いて $\text{div } \mathbf{E}$ に置き換え、 div を外したもので、式12の右辺を置き換えると次式が得られる。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (15)$$

こうして得られた式9、10、11、15の四本が最終的な**マクスウェル方程式**である。

2. 電磁波の予言と実証

ここに示したマクスウェルの式で電磁場の源である ρ と \mathbf{J} を0とすると、 \mathbf{E} も \mathbf{B} も0となりそうであるが、そうではない。式10の両辺の rot をとり、右辺の $\text{rot } \mathbf{B}$ を式15で置き換え、さらに式9を0としたものを仮定すると次式第1式が得られる。また、 $\mathbf{J} = 0$ とした式15で、その両辺の rot をとり、右辺の $\text{rot } \mathbf{E}$ を式10で置き換え、さらに式11を仮定すると次式第2式が得られる。ただし、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ である。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (16)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (17)$$

これらの式はいわゆる波動方程式と呼ばれるもので、電磁場が速度 c で波動として伝わっていくことを示している。

波動であるので、角周波数 ω (周波数の 2π 倍)、 x 方向にだけ角波数 k (単位長当たりの波数の 2π 倍) を持つ波動を仮定してみよう。例えば、 \mathbf{E} を、平面波の形である $\mathbf{E}_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ 、あるいは $\mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t - \theta)$ などと仮定すると、前二式の括弧内は

$$k^2 - \omega^2/c^2 = 0 \quad (18)$$

となる。つまり、 $k = \omega/c$ であれば \mathbf{E} や \mathbf{B} は存在可能となる。さらに、 \mathbf{i} を x 方向の単位ベクトルとすると、式10や15より、

$$\mathbf{i} \times \mathbf{E} = -c\mathbf{B}, \quad (19)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = (1/c)\mathbf{E}. \quad (20)$$

ただし、 $k = \omega/c$ の関係を使って k 、 ω を消去してある。これらの式より、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は \mathbf{i} に垂直であり、かつ、 \mathbf{i} 方向を見て、 \mathbf{E} は \mathbf{B} の時計回りに右垂直の方向を向くことまでが誘導できる。

\mathbf{B} (\mathbf{E} も同様) の y 成分、 z 成分がそれぞれ、角周波数 ω で時間変化し、かつ x 方向に角波数 k で変動していることになる。 y 成分、 z 成分の一方のみ、あるいは両方が同相で変化すれば、 \mathbf{B} のベクトルの先端は直線的に変化することになり、直線偏波と呼ばれる。また、両成分が同じ振幅を持ち、かつ位相が 90 度ずれている場合にはベクトルの先端は円に沿う変化をし、円偏波と呼ばれる。

その当時知られていた ϵ_0 、 μ_0 を用いて、波動の伝播速度を計算すると、 $c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$ であり、これは光速と一致する。また光も **偏光** という性質があり、直線偏光や円偏光があることから、このマクスウェルの得た波動は光であると理解された。

波動方程式の誘導の際に無視した ρ や \mathbf{J} を入れると、時間変動する電荷や電流が電磁波を発生したり吸収したりすることが導ける。この現象は **ヘルツ** により実験的に確認された。また、逆に、量子力学の黎明期には、電荷や電流の高速変動が光の放出や吸収に関わることもわかってきた。これにより、比較的ゆっくり変動する電磁波から光、X 線、 γ 線が周波数が異なるだけで連続した概念であることが理解されたのである。

3. 電磁場の運動量とエネルギー

電磁気学の分野で次に確立された方程式は、電磁場の運動量とエネルギーに関するものである。電磁気学の教科書にはあまり書かれていないことが多いが、マクスウェル応力や相対性理論といったキーワードで検索すると見付かるであろう。その誘導はあちこちにあるので、ここではその概略のみを示す¹⁾²⁾。

前提とするのは、次式で示す分布した電荷密度 ρ や電流密度 \mathbf{J} に働く **ローレンツ力** である。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

これとマクスウェル方程式を組み合わせると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{i} \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x_i} + \mathbf{j} \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial x_i} + \mathbf{k} \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{g}_{\text{em}}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (22)$$

T_{ij} と \mathbf{g}_{em} は次のように定義される。

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \epsilon_0 \left(E_i E_j - \delta_{ij} \frac{E^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \delta_{ij} \frac{B^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathbf{g}_{\text{em}} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (24)$$

である。ここで、**テンソル** (行列) T_{ij} は **マクスウェル応力テンソル**、 \mathbf{g}_{em} は **電磁場の運動量** と呼ばれている。また、 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0 = c^2 \mathbf{g}_{\text{em}}$ を **ポインティングベクトル** ともいう。なお、 δ_{ij} はクロネッカーデルタで、次式で定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \quad (25)$$

ここまでの誘導を復習すると、ローレンツ力の式と 4 本の **マクスウェル方程式** しか使っていないことに着目してほしい。

さて式 22 は元々分布電荷 (および分布電流) に働くローレンツ力であり、分布電荷の持つ単位体積当たりの **力学的運動量** \mathbf{g}_k の増加率ともいえるので、以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}_{\text{em}}}{\partial t}. \quad (26)$$

\mathbf{T} がテンソルであるため、 $\nabla \cdot$ は grad でも div でもないことに注意してほしい ($\nabla \cdot \mathbf{T}$ の本当の意味を理解するためには、成分展開の式に立ち返るべきである)。この式の両辺をある体積で体積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV (\mathbf{g}_k + \mathbf{g}_{\text{em}}) = \oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}. \quad (27)$$

これから、マクスウェル応力が運動量の増加を引き起こすことがわかるが、運動量には \mathbf{g}_{em} なる電磁場の運動量を含んでいることを理解してほしい。

式 23 に示した **マクスウェル応力** の意味については、別稿²⁾ に詳しく述べたので、そちらを参照し

てほしいが、要は電磁場が物質に対して及ぼしている力である。そこで、式 27 の意味することは、力学的 (応) 力の総和は、運動量の増加と一致するということになる。ただし、物質の運動量だけではなく、電磁場の運動量も関わってくることに着目してほしい。特に電磁場の運動量は目に見えないこともあり、とかく無視されがちである。また、マクスウェル応力テンソルに関する方程式 27、およびそれに絡む式 22 から 24 までがマクスウェル方程式ほどには知られていない、もしくは理解が難しいことが、無視される最大の理由でもあろう。しかし、それでも理解してほしいのは、式 27 と式 24 である。前者は力を議論する際に、電磁場の運動量も考慮しなければならないことを示し、後者はその電磁場の運動量の具体的な値を示しているからである。なお、電磁場の運動量が影響してくるのは、この g_{em} が時間変化するときである。式 27 の積分の体積をきわめて巨大にしていくと、遠方では電磁場が弱くなっていくため、右辺の応力の表面積分の項は消えていくだろう。残った左辺の項は、力学的運動量と電磁場の運動量の時間微分に関わるものである。通常は、力学的運動量の体積積分は、作用・反作用の法則で 0 になることが期待できるが、そうはならなくなる。

電磁気学の絡む現象で、作用・反作用の法則の不成立というパラドックスが数多く提示されている。しかし、そのすべてが、この電磁場の運動量の時間微分を考慮することにより、理解できることを知っていてほしい。

4. 電磁場の運動量に関わるパラドックス

4.1 ファインマンの角運動量のパラドックス

まず、ファインマン物理学の書にあるパラドックスを紹介しよう。³⁾ 図 1 に示すように、円板があり、中心を同じくする円状に点電荷が並べられているとする。また、その円板上に電流ループがあり、磁場を発生している。電流ループが円板に固定されていようがいなかろうが、問題の本質は変わらないが、ここでは、円板に固定されている

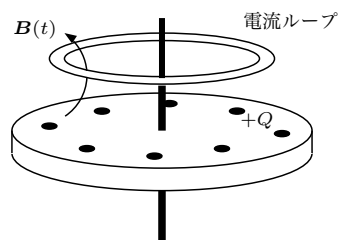


図 1 電流ループの電流を切って磁場を弱めると、電場が発生し電荷は動き出すが、力学的角運動量は保存されない

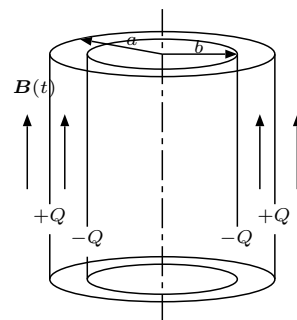


図 2 磁場を弱めていくと、二つの荷電円柱に与えられる角運動量の総和が 0 でなくなる。

ものとしよう。最初にループには電流が流れていて、磁場ができています。円板をコマのように自由に回転できるようにしておいて、このコイルの電流を切ると、環状の電場が発生し、点電荷がこの電場によって動き始める。問題は、最初コイルの電流が流れているときには角運動量がなかったのが、電流を切ると、角運動量が発生することである。つまり、角運動量が保存されないように見えるというパラドックスである。

パラドックスの正解は、円板が静止しているとき、電荷が作る電場と電流ループが作る磁場の外積、つまり電磁場の運動量が存在しているため、磁場が消失すると、これが力学的運動量に変換されるのである。

これをもう少し定量的に分析できる形としよう。それには、電磁場の運動量が有限のサイズに閉じ込められているのが望ましい。そこで、図 2 にあるように、同心の円柱状の導体を考え、これらの側面に対向するように正負の電荷を蓄えておく。両導体は一体となって回転するように、互いに固

定されているものとする。この軸方向に、あらかじめ外部から一様磁場を与えておく。ある時点からその磁場を零に減じていくと、電磁誘導により環状の電場が発生する。磁場は時刻 τ で 0 になるものとし、 $B = B_0(1-t/\tau)$ で変動するとしよう。すると、ファラデーの電磁誘導の法則から以下の電場が、 \mathbf{B} に対し右ネジの方向に発生する。その値は式 6 の下式より計算できる。

$$E = -\frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{r}{2\tau} B_0. \quad (28)$$

この電場により、半径 r 、総電荷量 Q の円柱が受ける力のモーメントの時間積分は、次式のようになる。

$$N = rQE. \quad (29)$$

この結果、外殻と内殻では明らかに力のモーメントの差が発生し、さらに磁場が 0 になるまでに受ける総角運動量は τ を掛けることにより、次のようになる。

$$L_k = \tau[aQE(a) - bQE(b)] = \frac{a^2 - b^2}{2} QB_0. \quad (30)$$

a は外円柱の半径、 b は内円柱の半径である。これが、この系の得る力学的角運動量であるが、磁場の存在しているときには 0 だったものが、磁場が消えた時点でこれだけの値になり、明らかに角運動量保存則が満たされないのである。

そこで電磁場の角運動量を考慮してみよう。磁場の存在するときには、二つの荷電円柱間に電場が存在し、かつ磁場も存在するため、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ が存在し、式 24 に示した電磁場の運動量 \mathbf{g}_{em} が存在する。これが電磁場の角運動量を構成しているのである。まず、荷電が円柱間に作る電場は中心方向を向いており、次式で与えられる。

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi r h}. \quad (31)$$

h は円柱の高さである。そこで、単位体積当たりの電磁場の運動量は \mathbf{B} に対し右ネジの方向を向き、かつ次の値となる。

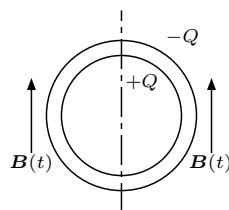


図 3 磁場を弱めていくと、二つの荷電球面に与えられる角運動量の総和が 0 でなくなる。

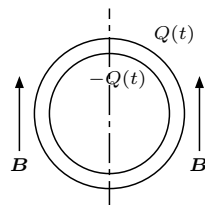


図 4 一定磁場のもとで、二つの球面に与えられている電荷を変化させると、角運動量の総和が 0 でなくなる。

$$g_{em} = \epsilon_0 EB = \frac{QB_0}{2\pi r h}. \quad (32)$$

これの作る角運動量は

$$\begin{aligned} L_{em} &= \int_b^a dr 2\pi r h (r g_{em}) = \int_b^a dr r QB_0 \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2} QB_0. \end{aligned} \quad (33)$$

となり、先に求めた力学的角運動量に一致する。つまり、磁場の存在するときには電磁場の角運動量 L_{em} だったものが、磁場消滅に合わせて消滅し、力学的角運動量 L_k を作り出したことがわかる。

なお、円柱の端効果が気になる人には、図 3 のように円柱を均等荷電した球面に置き換えて議論すればよい。¹⁾ ただし、計算はやや面倒になる。

4.2 パフ・パフの角運動量のパラドックス

ファインマンのパラドックスでは、磁場が変化しているが、電場が変化するモデルも可能である。パフ・パフらが提案したもので、図 4 に示すように、前小節の最後に述べた球体のモデルと同じ構造であるが、今度は磁場は一定であり、蓄積されている電荷のほうから Q から Q まで一定の速さで変化する。このとき、電荷は内殻の北極のほうから注入されるとする。これに対向して、外殻のほうには逆向きの電流が流れる。このとき、内殻の表

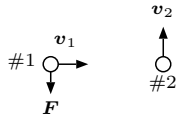


図5 二つの移動電荷に働く力には、作用・反作用の法則が成立しない。

面に流れる電流にはローレンツ力が働く。この力の合計は内殻を回転させる方向に角運動量を与えるようなトルクを発生する。一方、外殻に働くトルクを計算すると、これら二つには差があり、結局、二つの球に与えられる角運動量の和は0とはならない。つまり、この差の分、角運動量は保存されないように見えるというパラドックスである。

なお、もともとのパフ・パフの提案は、外に置かれたソレノイドの代わりに、内殻の内部一杯に一樣に磁化した磁石を置き、その作る磁場を変化させている。このほうが、すべての要素が外殻の内側に存在するため、考えやすいが、球体の作る磁場の値を知らないと、計算できない。球体の作る磁場の値は、色々な著書に出ているため、ぜひ、トライしてほしいが、いずれにしても本質的な差はない。さらに前小節のように、円柱の方が計算が楽である。この場合にも、電磁場の運動量を考慮すれば、パラドックスは解消される。詳細な計算は読者に任せる。

4.3 ファインマンの作用・反作用のパラドックス

最後に、もう一つファインマン物理学に掲載されたパラドックスを紹介しよう。³⁾ 図5に示すような二個の直交運動する電荷を考える。一方の直線運動をしている電荷#1の正面に、ちょうど別の電荷#2がきた瞬間を考える。電荷#2は、電荷#1の運動方向と直角に動いている。二つの電荷は電気量が同じであれば、互いに電場を及ぼし合って反発するが、これらには作用・反作用の法則が成り立つ。また、それ以外に磁場の効果が働く。#1は#2付近に磁場を作らないが、#2は#1付近に磁場を作り出す。この磁場によりローレンツ力が働き、#1には図に示す F のような力が働く。この力に対する反作用がどこにも存在せず、作用・反作用の法則が成立しないのはおかしいというも

のである。

定量的な考察は省略し、定性的な説明のみしておこう。#1の作る電場、磁場を E_1 、 B_1 などとすると、 $E \times B = E_1 \times B_1 + E_1 \times B_2 + E_2 \times B_1 + E_2 \times B_2$ である。これら4項の形を検討してみよう。近傍では空間的に複雑な変化をするため、この二つの電荷から十分離れたところで、考察する。このうち、第1項と第4項はそれぞれの粒子と同じ速度で動いていく一定値のため、力学的運動量の変化とは無関係である。第2項はおよそ v_2 の方向を向き、二電荷の距離が離れているときにはほぼ0であるが、近づくにしたがって、増加していく。つまり、 F と反対向きの電磁場運動量の増加となっているため、その反作用となっていると考えられる。

5. 電磁気学の実験と方程式

電磁気学は、いくつかの実験結果が方程式化され、それが巧みに組み合わせられ、さらに方程式間での矛盾が理論的に解消され、その結果、現象が予言され、それが実験により確認された近代における快挙とえよう。特に電磁場の予想と実証は特記すべきであろう。また、電磁気学に関する力学系で、作用・反作用の法則が成り立たなく見えるパラドックスもマクスウェル応力テンソルの誘導に絡んで得られた電磁場の運動量という概念を導入すれば、解消されることを見た。

こうした方程式と実験がタッグを組んで新しい現象の発見に繋がった分野は他にも沢山あるが、これほど複雑な式の組み合わせからなる領域は稀少であることを強調して、稿を終えたい。

参考文献

- 1) 岡部 洋一, 『電磁気学の意味と考え方』, 第7章「力とエネルギー」および第11章「パラドックス」, 講談社, 2008. または <http://www.moge.org/okabe/temp/elemag.pdf>
- 2) 岡部 洋一, 『ファラデーの力線とマクスウェル応力』, 数理科学, No. 610, April, 2014.
- 3) R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", Addison Wesley,

1965.

岩波書店より和訳『ファインマン物理学』がある。

(おかべ・よういち, 放送大学)