

座標変換

岡部 洋一

放送大学教授 (東京大学名誉教授)

2013 年 3 月 20 日

起草: 2009 年 6 月 1 日

[概要] 一般相対性理論で重要なクリストッフェル記号とか、曲率テンソルとは何か、曲線座標系における、grad、div、rot などのベクトル微分演算子はどうか、などを統一的に紹介する。また、最後に一般相対性原理について論じる。

All Rights Reserved (c) Yoichi OKABE 1997-present.

個人の使用以外のコピーを禁じます。また、再コピーおよび再配布は禁止します。ただし、教育目的に限り、再コピー、再配布は原著者を明示するという条件でのみ許諾します。

[HTML ファイル] [PDF ファイル] [電磁気学 HTML ファイル] [電磁気学 PDF ファイル] [座標変換の掲示板]

[岡部の Web に公開の文書] [岡部のトップページ]

まえがき

リーマン幾何学という数学の分野がある。これは球面座標系を一般化する過程で仕上がっていった学問である。球面座標とは地球の表面である球面を表わすのに使われる緯度経度のことである。数学では、度分秒ではなく弧度法の θ, ϕ が使われる。単位ベクトルも、それぞれの角度の 1radian に対応する接線方向のベクトルで定義されるため、 ϕ 方向の単位ベクトルは、極付近では赤道付近に比べ極めて短くなる。つまり、単位ベクトルの長さ 1 も保証されていない。さらに、ある地点の単位ベクトルと別の地点の単位ベクトルは、方向も平行ではない。また、球面座標系では直線に相当する線は球の大円であり、測地線と呼ばれる。二本の大円は必ず二点で交差するから、平行線が一本も引けないことも知られている。逆に、鞍状の曲面では互いに交差しない測地線は無数に引ける。

リーマン幾何学は、こうした非ユークリッド空間を扱うのにも便利であるが、それ以外にも電磁場解析などで使われるユークリッド空間である極座標系や円柱座標系を扱うにも適している。特に、こうした座標における grad、div、rot などを統一的に扱うことができる。さらに、非ユークリッド空間である相対性理論の理解にも便利であり、特に一般相対性理論を構成する数学として有名である。

2009 年 6 月 1 日: 座標変換のページを全面書き直し

2009 年 6 月 15 日: 測地線の説明を追加

2009 年 7 月 1 日: 量が増えたため、電磁気学 から分離

2013 年 2 月 23 日: 一般相対性理論の章を完成

目次

第 1 章	自然基底、反変ベクトル、計量テンソル	1
1.1	自然基底と計量テンソル	1
1.2	座標変換	7
1.3	反変ベクトル	14
第 2 章	双対座標系	20
2.1	双対基底	20
2.2	双対座標系の計量テンソル	21
2.3	共変ベクトル	22
2.4	降階、昇階と内積	24
第 3 章	共変微分	31
3.1	平行移動	31
3.2	基底の平行移動と接続係数	33
3.3	計量テンソルと接続係数	38
3.4	空間変化するベクトル場と共変微分	41
3.5	テンソルの共変微分	44
3.6	測地線	47
第 4 章	曲率	53
4.1	ベクトル場の二階共変微分商	54

4.2	基底のループに沿う移動	56
4.3	ベクトルのループに沿う移動	58
4.4	曲率テンソルの対称性	60
4.5	リッチテンソル、スカラー曲率とアインシュタインテンソル	62
第 5 章	空間微分演算子	67
5.1	接続係数の計算	67
5.2	空間微分演算子	69
5.3	直交曲線座標系における空間微分演算子	71
第 6 章	一般相対性理論	81
6.1	等価原理	81
6.2	特殊相対性理論の概要	83
6.3	エネルギー運動量テンソル	87
6.4	測地線と重力場中の質点の運動	93
6.5	アインシュタイン方程式	96
6.6	シュバルツシルト解	100
6.7	ブラックホールはあるのか	105
6.8	その他の相対論の効果	107
索引		109

第1章

自然基底、反変ベクトル、計量テンソル

基底 (デカルト座標では単位ベクトルのこと)、座標、距離、内積、座標変換、ベクトル、テンソル、またリーマン幾何学にとって重要な概念である計量テンソルについて紹介しよう。

1.1 自然基底と計量テンソル

リーマン幾何学 (Riemannian geometry) で扱う座標系は、デカルト座標系 (Cartesian coordinate system) のように、座標軸が直線で直交しているような単純なものだけでなく、座標軸は直線であるが斜めに交差している直線座標系 (linear coordinate system)、さらに、極座標系のように、座標軸が曲線である曲線座標系 (curvilinear coordinate system) など、どんな座標系でもよい。なお、実用的な曲線座標系では座標曲線が直交している直交座標系 (orthogonal coordinate system) が多く、特に直交曲線座標系 (orthogonal curvilinear coordinate system) とも呼ばれる。

このようにリーマン幾何学ではかなり自由な座標系を対象とするが、座標

の変化に連れ、点はゆっくりと移動する、つまり連続性が保証されている空間しか対象としていない。また各点の近傍で距離が明白に定義されていることが、リーマン幾何学の大前提である。

こうした比較的自由的な座標系の一点の座標を $(x^1, x^2, \dots, x^N) = (\{x^m \mid m = 1, 2, \dots, N\})$ と表わそう。1, 2, N, mなどは上付きサフィックスであり、冪乗ではない。また、何故上付きサフィックスを使うかについては後述する。

また各点で、ある特定の座標 x^m だけを 1 増加させたときの点の移動方向と移動距離を持つベクトル (vector) e_m を定義し、それを基底ベクトルもしくは単に基底 (basis) と呼ぶ。本書では基底と呼ぼう。移動が直線的でない場合には、基底は微分概念で定義される。つまり、二点間を結ぶベクトルの長さを座標の変化分で割ったものを、変化量を限りなく小さくしたもので定義する。こうしてすべての各座標変化に対応した基底 $(e_1, \dots, e_N) = (\{e_m\})$ が得られる。このように、座標系のクリッドとリンクした方向と長さを持つ基底を自然基底 (natural basis) と呼ぶ。

デカルト座標系では基底は単位ベクトル (unit vector) と呼ばれる長さ 1 のベクトルとなり、かつ互いに直交する。二次元極座標 (r, ϕ) では、よく知られているように、 $\phi = \text{const}$ の放射状の直線群と、 $r = \text{const}$ の円環状の曲線群が曲線座標系を構成するが、その上の任意の一点 (原点以外) を中心に拡大してみると、ほぼ一定の間隔の格子で構成されている。ただし、 r 方向の格子間隔は 1 であるのに対し、 ϕ 方向の格子間隔は r と、格子間隔の方向依存性は明かに存在する。したがって、ある一点における格子の接線方向を持つ長さ 1 や r のベクトルが自然基底となる。

このように座標系が歪んでいる可能性を持っていても、微小な二点を使って、ベクトルという概念が定義できる。例えば、近接した二つの座標間を結ぶベクトル ds を

$$ds = dx^1 e_1 + \dots + dx^N e_N = \sum_m^N dx^m e_m$$

のように定義しよう。これを線素ベクトル (line element vector) という。 dx^m は ds の e_m 方向の成分である。^{*1}

やや細かい議論となるが、 $dx^m e_m$ は長さの単位を持つ。この長さの単位は e_m が持つのか dx^m が持つのかの議論をしておきたい。例えば二次元極座標の場合、 r 方向は $|dx^1 e_1| = dr$ なので、 $dx^1 (= dr)$ の単位は [m]、 e_1 の単位は [1] としてよいであろう (もちろん dr の単位を [1]、 e_1 の単位を [m] とすることも可能である)。一方、 ϕ 方向は $dx^2 = d\phi$ として、 $|dx^2 e_2| = d\phi r$ なので、 $dx^2 (= d\phi)$ の単位は [1] (radian は無次元とする)、 e_2 は単位 [m] として r [m] のベクトルとしてよいであろう。つまり、自然基底の単位にも、ベクトルの成分の単位にも色々あることを理解しておいてほしい。

さて、リーマン幾何学では沢山の \sum 記号が現われる。そこでアインシュタイン規約 (Einstein convention) という便利な記法を採用しよう。これは、同じサフィックスが上下に一つずつ現れるときには、総和記号を省略するというものである。その結果、上式は次のように記載してよいことになる。

$$ds = dx^m e_m \quad (1.1)$$

その、長さ ds を線素 (line element) とよぼう。線素の二乗 (以下これも簡単に線素とよぶこととする) は次式で与えられる。

$$ds^2 = ds \cdot ds = (dx^m e_m) \cdot (dx^n e_n) = (e_m \cdot e_n) dx^m dx^n$$

ここで、次式で定義される計量テンソル (metric tensor) g_{mn} と呼ばれる量を定義しよう。

$$g_{mn} = e_m \cdot e_n \quad (1.2)$$

右辺の内積は通常の意味の内積であり、 $|e_m|$ などを自然基底の長さ (1 とは限らない)、 θ をこれらベクトルの挟む角度とすると、 $e_m \cdot e_n = |e_m| |e_n| \cos \theta$

^{*1} 右辺は $\sum_m e_m dx^m$ と記載してもよい。行列と異なり、積を構成する項の順はどうでもよい。しかし、これらを行列で表現するときには注意が必要である。

である。すると、前式は次式のように書くことができる。

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n \quad (1.3)$$

何故、線素がよく知られている $\sum_m (dx^m)^2$ にならないかという、リーマン幾何学では、自然基底がいろいろな長さを持ちうるからである。したがって、 g_{mn} とは、自然基底の長さや非直交の補正をしているといっておくだろう。 e_m が実数ベクトルであるため、 $e_m \cdot e_n = e_n \cdot e_m$ が成り立ち、 $(\{g_{mn}\})$ は対称行列となる。

$$g_{mn} = g_{nm} \quad (1.4)$$

なお、詳細は省くが、複素数ベクトルの世界では、 $(\{g_{mn}\})$ はエルミート行列となる。

e_m と e_n が直交している場合、非対角要素は $g_{mn} = 0$ となり、対角要素 g_{mm} は自然基底 e_m の二乗長となる。デカルト座標系ではさらに $g_{mm} = 1$ となる。なお、特殊相対性理論では、線素は $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ で定義されるが、 dt が大きくなる過去圏や未来圏を向くベクトルでは、 ds^2 は負となる。その場合には、線素を $-ds^2$ で定義すれば、以後の議論はほぼすべて成立する。

空間の各点で定義された一般的なベクトル A (微小ベクトル、微分などで定義されたベクトル、あるいは場のベクトルなど) は

$$A = A^m e_m \quad (1.5)$$

と成分に展開できる。これから、二つのベクトルの内積 (inner product) という概念を定義することができる。

$$A \cdot B = (A^m e_m) \cdot (B^n e_n) = (e_m \cdot e_n) A^m B^n = g_{mn} A^m B^n \quad (1.6)$$

$B = A$ とすることで、ベクトルの二乗長を計算することができる。

$$A \cdot A = (A^m e_m) \cdot (A^n e_n) = (e_m \cdot e_n) A^m A^n = g_{mn} A^m A^n \quad (1.7)$$

$A = dx$ とすることで、式 1.3 が得られる。

なお、詳細は省くが、複素ベクトルの場合の内積の定義は次のようになる。

$$A^* \cdot B = (A^m e_m)^* \cdot (B^n e_n) = (e_m^* \cdot e_n) A^{m*} B^n = g_{mn} A^{m*} B^n \quad (1.8)$$

$g_{mn} = e_m^* \cdot e_n$ がエルミートテンソルであるので、 $A \cdot A$ は常に実数となる。

[例 2.1] [デカルト座標系] デカルト座標系 (x, y, \dots) では、それぞれの座標軸方向を向く単位ベクトル (e_x, e_y, \dots) を基底とすることにより、任意の位置ベクトル x は次式で与えられる。

$$x = x e_x + y e_y + \dots$$

これから直ちに線素ベクトルは次のように与えられる。

$$ds = dx e_x + dy e_y + \dots$$

これより、線素は δ_{mn} をクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) として次式で与えられる。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \dots = \delta_{mn} dx^m dx^n \quad (1.9)$$

したがって、デカルト座標系では $g_{mn} = \delta_{mn}$ である。たとえば、二次元のデカルト座標系での g_{mn} を行列で書けば、

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

[例 2.2] [二次元極座標系] 二次元極座標系では、 r 一定の線は曲線となり、任意の二点を結ぶベクトルは簡単な式では与えられない。しかし、微小な領域に限れば、 e_r を動径方向の単位ベクトル、 e_ϕ を円弧方向の接線方向を持つ長さ r のベクトルとして、線素ベクトルは次式で与えられる。

$$s = dr e_r + d\phi e_\phi$$

e_ϕ の長さが r であることを考慮し、線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (1.11)$$

したがって、二次元極座標系の g_{mn} を行列で書けば、

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

[例 2.3] [三次元極座標系] 三次元極座標系の線素ベクトルは次式で与えられる。

$$ds = dr e_r + d\theta e_\theta + d\phi e_\phi$$

であるが、 e_θ の長さが r 、 e_ϕ の長さが $r \sin \theta$ であるので、線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.13)$$

したがって、三次元極座標系の g_{mn} を行列で書けば、

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

[例 2.4] [ミンコウスキー空間] 特殊相対性理論で現われるミンコウスキー空間 (Minkowski space) では線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (1.15)$$

g_{mn} の行列は次のようになる。

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

となる。通常の相対論の議論では $x^4 = ct$ として $g_{44} = -1$ とするが、本章では座標変換の理解を深めるために意識的に $x^4 = t$ とし、

$g_{44} = -c^2$ とする。 $e_1 \cdot e_1 = 1$ などが成立するが、 $e_4 \cdot e_4$ だけは $-c^2$ となる。長さの絶対値が c と大きいばかりでなく、その二乗長が負となるのはやや意外であるが、これは一般的な dx のようなベクトルの長さに対し、負の寄与をすることを示していると理解すべきである。また、ベクトル dx の t 成分が大きいと、ベクトルの二乗長も負となるが、その場合には、 ds^2 の代わりに $-ds^2$ を使うとか、時間方向を重視した二乗時間差 (以下、これも線素と呼ぶ) を使えばよい。

$$d\tau^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2 \quad (= -ds^2/c^2)$$

これらの例からわかるように、これら直交 (曲線) 座標系における $\{g_{mm}\}$ の対角要素の平方根 $\sqrt{|g_{mm}|}$ はかなり重要な量である。後に第 5 章「空間微分演算子」でスケール因子 (scale factor) として詳しく紹介する。

1.2 座標変換

元の座標系の上に張られた別の座標系の座標を $(x^{\mu'} | \mu' = 1', 2', \dots)$ とし、これらは元の座標系の座標の滑らかな関数で与えらえるとする。多くの書では、新座標系にはプライムを $x^{\mu'}$ のように付すが、本書では、新座標系のサフィクスそのものにプライムとを付けることにする。さらにサフィックスが変数である場合には、ギリシャ文字にすることにして区別する。元の座標系のサフィックスはローマンとする。ここでも、サフィックスの上付き、下付きがあるが、その区別の説明はもう少し先まで待つてほしい。

新たな座標系の方も、デカルト座標系でも直線座標系でも曲線座標系でも構わない。例えば、曲線座標系の場合、 $x^{\mu'} = \dots, -1, 0, 1, \dots$ といった等座標線 (三次元だと面) を引き、それらによって作られるグリッド (一般には微小な斜方形や斜方体) に対応して自然基底 $e_{\mu'}$ を定義する。一般には、基底の長さや方向は場所によってどんどん変化する。

まず、全微分 $dx^{\mu'}$ を元座標 (x^1, x^2, \dots) に対して得よう。

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m} dx^m \quad (1.17)$$

右辺は m による総和である。分母の上付きは分数全体の下付きとみなすことになっているので、ここでもアインシュタイン規約を用いている。 $dx^{\mu'}$ と dx^m の関係が線形であるとき、その変換をアフィン変換 (affine transform) と言う。 $\partial x^{\mu'}/\partial x^m$ は場所によって緩やかに変化していくので、局所的にはアフィン変換と言えるが、大局的にはアフィン変換ではない。

$\partial x^{\mu'}/\partial x^m$ はしばしば $\partial_m x^{\mu'}$ と略記されるが、本書ではこれをさらに簡略化し、 $\partial_m^{\mu'}$ と略記することにしよう。

$$dx^{\mu'} = \partial_m^{\mu'} dx^m \quad (1.18)$$

元の座標系の成分から新しい座標系の成分へ変換 (transform) することを順変換 (forward transform) と呼び、ここに現われた $\partial_m^{\mu'}$ を変換係数 (transform coefficient) と呼ぶ。すぐ後に現われるように、この逆数も変換係数と呼ばれる。そこで、本書ではこの係数を便宜的に反変変換係数 (contravariant transform coefficient) と呼んでおこう。^{*2}

式 1.17 や式 1.18 は行列を使って書きあらわすことができる。例えば、式 1.18 は

$$\begin{aligned} (\{dx^{\mu'}\}) &= (\{\partial_m^{\mu'}\}) (\{dx^m\}) \\ &= \begin{pmatrix} dx^{1'} \\ \vdots \\ dx^{N'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1^{1'} & \cdots & \partial_N^{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1^{N'} & \cdots & \partial_N^{N'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

^{*2} 反変ベクトルの順変換の際に用いられるという意味でこう名付けた。この係数の逆数は、直後に説明するが共変ベクトルの順変換に使われるので共変変換係数と名付ける。反変、共変の意味については後述。面倒なことに、反変ベクトルの逆変換には共変変換係数が使われ、共変ベクトルの逆変換には反変変換係数が使われる。

プライムのついた方の数字が μ に対応することは、容易に想像できるであろう。この変換係数からなる行列はヤコビ行列 (Jacobian matrix) とも言われる。

x^m が $x^{\mu'}$ の関数であるとみなすこともできる。その場合には全微分 x^m は $x^{\mu'}$ の偏微分商を利用して、次式ようになる。

$$dx^m = \partial_{\mu'}^m dx^{\mu'} \quad (1.20)$$

これが dx の逆変換 (reverse transform) である。 $\partial_{\mu'}^m$ も変換係数であるが、本書ではこの係数を便宜的に共変変換係数 (covariant transform coefficient) と呼んでおこう。以後の座標変換では $\partial_m^{\mu'}$ と $\partial_{\mu'}^m$ の二種類の変換係数が現われる。

ベクトルそのものは元の座標系でも新しい座標系でも不変である。例えば、 dx を、変換先の自然基底 $e_{\mu'}$ で展開しよう。

$$dx = dx^{\mu'} e_{\mu'} \quad (= dx^m e_m)$$

この式の括弧内の dx^m に式 1.20 を代入し、両辺から $dx^{\mu'}$ を消去すると、変換先の自然基底 $e_{\mu'}$ を生成する式を得ることができる。

$$e_{\mu'} = \partial_{\mu'}^m e_m \quad (1.21)$$

この式は $e_{\mu'}$ を e_m で展開した形にもなっており、 $\partial_{\mu'}^m$ は、その展開成分であることがわかる。注意して欲しいのは、これは基底ベクトルの座標変換をやっているのではなく、元の座標系の基底ベクトルから順方向に新しい座標系における基底ベクトルを生成しているのである。またその際には、共変変換係数が利用される。

逆に $dx^{\mu'}$ に式 1.18 を代入し、両辺から dx^m を消去すると、元の座標系の自然基底 e_m を変換先の自然基底で展開したときの式を得ることができる。

$$e_m = \partial_m^{\mu'} e_{\mu'} \quad (1.22)$$

ここでも変換係数が、反変変換係数 $\partial_m^{\mu'}$ であることを示している。

ベクトルの座標変換の際、基底ベクトルの生成則と同じ変換係数、つまり共変変換係数 $\partial_{\mu'}^m$ で順変換されることを共変 (covariant) と呼び、反変変換係数 $\partial_m^{\mu'}$ により変換されることを反変 (contravariant) と呼ぶ。この意味で、ベクトル dx の成分 dx^m は反変成分である。

リーマン幾何学では、反変の量のサフィックスは上付きにし、共変の量のサフィックスは下付きにするという規則がある。これで、何故 dx^m は上付きとなるかが分ったであろう。 e_m と $e_{\mu'}$ は互いに異なるベクトルであるが、たまたま、共变的な式で結び付けられるため、下付きサフィックスを付けている。

さらにアインシュタイン規約では、同じサフィックスが上下に現われたときのみ、総和記号 \sum を省略できるとなっているが、今迄の式を振り返って、これらの事実を確かめてみよう。

なお、今後度々現われる変換係数に関する次の式を確認しておこう。

$$\begin{aligned}\partial_{\mu'}^n \partial_m^{\mu'} &= \frac{\partial x^n}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m} = \frac{\partial x^n}{\partial x^m} = \delta_m^n \\ \partial_m^{\nu'} \partial_{\mu'}^m &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu'}} = \delta_{\mu'}^{\nu'}\end{aligned}\tag{1.23}$$

一言でいえば、順変換して逆変換すれば元へ戻る、逆変換して順変換すれば元へ戻るということである。

続いて計量テンソル g_{mn} の変換則を求めよう。

$$g_{\mu'\nu'} = e_{\mu'} \cdot e_{\nu'} = (\partial_{\mu'}^m e_m) \cdot (\partial_{\nu'}^n e_n) = \partial_{\mu'}^m \partial_{\nu'}^n (e_m \cdot e_n) = \partial_{\mu'}^m \partial_{\nu'}^n g_{mn}\tag{1.24}$$

つまり、 g_{mn} は二つのサフィックスに依存しているが、各サフィックスごとに自然基底と同じ共変変換係数を用いた変換を受ける。

一般に、二つのサフィックスを持ち、それぞれがベクトルの成分と同様に変換される (共変でも反変でも両者が混ざっていてもよい) 量を持つものをテンソルと呼ぶ。 g_{mn} は、二つのサフィックスとも共変変換を受けることから、テンソルの共変成分と呼ばれる。なお、上式より ($\{g_{mn}\}$) が対称行列な

ので、 $(\{g_{\mu'\nu'}\})$ も対称行列であることが誘導できる。逆変換はいうまでもなく、反変変換係数を用いて計算できる。

$$g_{mn} = e_m \cdot e_n = (\partial_m^{\mu'} e_{\mu'}) \cdot (\partial_n^{\nu'} e_{\nu'}) = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} (e_{\mu'} \cdot e_{\nu'}) = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} g_{\mu'\nu'} \quad (1.25)$$

球面座標系は、三次元空間に置かれた球面という部分空間の上で定義されている二次元座標系であり、この二つの空間の座標系の次元は明かに異なる。本書では、このような場合、次元の大きい方の座標系を x^M のような大文字のサフィックスを用いて、区別することとする。今、元の空間を x^M 、部分空間を $x^{\mu'}$ とし、前者の空間の次元の方が大きいとしよう。このとき、 x^M を $x^{\mu'}$ の関数として与えるのは簡単であるが、逆に $x^{\mu'}$ を x^M の関数として得るには、 x^M に何らかの制約条件を付けない限り不可能である。しかし、部分空間側に適切な独立な変数を追加して、三次元にすれば、相互に変換可能となる。例えば、球面座標系 (θ, ϕ) に r を追加すればよい。以後の議論でこのようなテクニックを使うことがあるので、若干記憶しておいてほしい。

[例 2.5] [二次元極座標系] $(\{x^{\mu'}\}) = (r', \phi')^T$ を、二次元デカルト座標系 $(\{x^m\}) = (x, y)^T$ の上に考えよう。なお、ここで極座標系の変数にプライムがついているのは、曲線座標系だからではなく、元座標系と変換先座標系の二つの座標系が存在するからであり、変換先にプライムを付した。右上 T は転置を意味し、横ベクトルを縦ベクトルにする。この間の変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= r' \cos \phi' \\ y &= r' \sin \phi' \end{aligned} \quad (1.26)$$

これより、微小座標ベクトルに対する逆変換式および共変変換係数

$\partial_{\mu'}^m$ (m 行 μ' 列) が得られる。

$$\begin{aligned} (\{dx^m\}) &= (\{\partial_{\mu'}^m\})(\{dx^{\mu'}\}) \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi' & -r' \sin \phi' \\ \sin \phi' & r' \cos \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr' \\ d\phi' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.27)$$

また、次の順変換式が成立する。

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi' &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.28)$$

これから反変変換係数の行列 $(\{\partial_m^{\mu'}\})$ (μ' 行 m 列) は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\{dx^{\mu'}\}) &= (\{\partial_m^{\mu'}\})(\{dx^m\}) \\ &= \begin{pmatrix} dr' \\ d\phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi' & \sin \phi' \\ -\sin \phi'/r' & \cos \phi'/r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

反変変換係数 $(\{\partial_m^{\mu'}\})$ は共変変換係数 $(\{\partial_{\mu'}^m\})$ の逆行列としても得られ、その方が簡単である。

これらの変換係数から、次の基底に関する各式が得られる。ただし、上記の行列の転置しないものを利用していることに注意してほしい。

$$\begin{aligned} e_{r'} &= \cos \phi' e_x + \sin \phi' e_y \\ e_{\phi'} &= -r' \sin \phi' e_x + r' \cos \phi' e_y \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} e_x &= \cos \phi' e_{r'} - (\sin \phi'/r') e_{\phi'} \\ e_y &= \sin \phi' e_{r'} + (\cos \phi'/r') e_{\phi'} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$g_{\mu'\nu'}$ の値はこの場合、デカルト座標系である $g_{mn} = \delta_{mn}$ から計算

できる。

$$\begin{aligned}
 (\{g_{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_{\mu'}^m\})^T (\{g_{mn}\}) (\{\partial_{\nu'}^n\}) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi' & -r' \sin \phi' \\ \sin \phi' & r' \cos \phi' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi' & -r' \sin \phi' \\ \sin \phi' & r' \cos \phi' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r'^2 \end{pmatrix} \tag{1.32}
 \end{aligned}$$

これから、二つの自然基底 $e_{r'}$ および $e_{\phi'}$ は互いに直交し、かつそれぞれの長さは 1 と r' であることがわかる。

[例 2.6] [球面座標系] 球面座標系 (spherical coordinate system) とは、三次元の基準座標系 $(x^M) = (x, y, z)^T$ に置かれた半径 a の球面上の位置を、緯度経度に相当する二次元の座標 $(x^{\mu'}) = (\theta', \phi')^T$ で表したものである。元々、リーマン幾何学は、球面幾何学を一般化したものである。そのため、これについて議論しよう。なお、 $\partial_{\mu'}^M$ の計算は M の次元数が μ' の次元数より大きいからできることに注意してほしい。

微小座標ベクトルの逆変換式は a を定数として、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x &= a \sin \theta' \cos \phi' \\
 y &= a \sin \theta' \sin \phi' \\
 z &= a \cos \theta'
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

したがって反変変換係数 $\partial_{\mu'}^M$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 (\{dx^M\}) &= (\{\partial_{\mu'}^M\}) (\{dx^{\mu'}\}) \\
 &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta' \cos \phi' & -a \sin \theta' \sin \phi' \\ a \cos \theta' \sin \phi' & a \sin \theta' \cos \phi' \\ -a \sin \theta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta' \\ d\phi' \end{pmatrix} \tag{1.34}
 \end{aligned}$$

また、基底は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 e_{\theta'} &= a \cos \theta' \cos \phi' e_x + a \cos \theta' \sin \phi' e_y - a \sin \theta' e_z \\
 e_{\phi'} &= -a \sin \theta' \sin \phi' e_x + a \sin \theta' \cos \phi' e_y
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

共変変換係数 $\partial_M^{\mu'}$ は、次元が不足のため計算できない。

$g_{\mu'\nu'}$ は $e_{\mu'} \cdot e_{\nu'}$ から計算できるが、デカルト座標系である $g_{MN} = \delta_{MN}$ から、座標変換によっても計算できる。

$$\begin{aligned} (\{g_{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_{\mu'}^M\}) (\{g_{MN}\}) (\{\partial_{\nu'}^N\})^T \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \theta' \cos \phi' & -a \sin \theta' \sin \phi' \\ a \cos \theta' \sin \phi' & a \sin \theta' \cos \phi' \\ -a \sin \theta' & 0 \end{pmatrix}^T \\ &\quad \begin{pmatrix} a \cos \theta' \cos \phi' & -a \sin \theta' \sin \phi' \\ a \cos \theta' \sin \phi' & a \sin \theta' \cos \phi' \\ -a \sin \theta' & 0 \end{pmatrix} \\ &= a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.36)$$

この結果からわかるように、計量テンソルは元の座標系の次元数ではなく、球面に拘束された緯度経度の二次元という次元を持つ。したがって、この瞬間、元の座標系の持つ三次元空間という概念は消滅したと言っても過言ではなからう。なお、二つの自然基底 e'_θ および e'_ϕ の長さはそれぞれ a と $a|\sin \theta'|$ で、かつ互いに直交していることがわかる。

本文でも述べたように、球面座標系側に r なる第三の変数を導入すれば、もう少し、わかりのよい議論ができるが、その場合は三次元極座標系の議論と同じになるので、ここでは省略する。一般には、このように便利な変数がいつも簡単に得られるとは限らないのが面倒な点である。

1.3 反変ベクトル

任意のベクトル A の成分の変換則を求めよう。ただし、曲線座標系では二点間を結ぶ位置ベクトルのような長いベクトルは対象としない。微小ベク

トルや微分により得られるようなベクトル、位置だけで値が決まる場のベクトルなどが対象である。

元の座標系におけるベクトルの展開式に現われる自然基底を $e_{\mu'}$ で展開してみよう。

$$A = A^m e_m = A^m (\partial_m^{\mu'} e_{\mu'}) = (\partial_m^{\mu'} A^m) e_{\mu'} \quad (1.37)$$

この係数 $\partial_m^{\mu'} A^m$ は A を $e_{\mu'}$ で展開したときの成分 $A^{\mu'}$ であるから、次式が得られる。

$$A^{\mu'} = \partial_m^{\mu'} A^m \quad (1.38)$$

順変換に、座標ベクトルと同じ反変変換係数 $\partial_m^{\mu'}$ を使っている。

前述のように、自然基底と同じ変換式にしたがうことを共変 (covariant) といって下付きサフィックスを付け、逆変換式にしたがうことを反変 (contravariant) といって上付きサフィックスを付ける。このため、 A^m は、ベクトル A の反変成分 (contravariant component) と呼ばれ、上付きサフィックスを用いる。なお、ベクトルの反変成分は、他書では反変ベクトル (contravariant vector) と記載されているが、本書ではその意味を考え、あえて反変成分と表現した。

今度は変換先の座標系の展開式に現われる $e_{\mu'}$ の方を変換してみよう。

$$A = A^{\mu'} e_{\mu'} = A^{\mu'} (\partial_{\mu'}^m e_m) = (\partial_{\mu'}^m A^{\mu'}) e_m \quad (1.39)$$

この係数 $\partial_{\mu'}^m A^{\mu'}$ は A を e_m で展開したときの成分 A^m であるから、次式が得られる。

$$A^m = \partial_{\mu'}^m A^{\mu'} \quad (1.40)$$

このように反変成分は、逆変換には共変変換係数を使う。

変換先の座標系における内積を、変換先の成分で表してみよう。

$$\begin{aligned} A \cdot B &= g_{mn} A^m B^n = (\partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} g_{\mu'\nu'}) (\partial_{\kappa'}^m A^{\kappa'}) (\partial_{\lambda'}^n B^{\lambda'}) \\ &= (\partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} \partial_{\kappa'}^m \partial_{\lambda'}^n) g_{\mu'\nu'} A^{\kappa'} B^{\lambda'} \\ &= (\delta_{\kappa'}^{\mu'} \delta_{\lambda'}^{\nu'}) g_{\mu'\nu'} A^{\kappa'} B^{\lambda'} = g_{\mu'\nu'} A^{\mu'} B^{\nu'} \end{aligned} \quad (1.41)$$

つまり、内積は変換先でも同じ形で表現され、座標変換に対する不変量つまりスカラー (scalar) となっている。ここで、式 1.23 を利用した。

ある量の成分が T^{mn} などのように二つのサフィックスで表現でき、かつその成分が $\partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'}$ など、二つの変換係数の積で変換できるとき、この量を 2 階のテンソル (tensor) の成分と呼ぶ。二つの自然基底 e_m および e_n に絡んだ量が T^{mn} であるとき、 $T = T^{mn} e_m \otimes e_n$ のように書かれる。 \otimes は直積といわれる表示法であり、二つの基底の組に絡んでいることと、全体の変換係数が、それぞれの変換係数の積になることを示しているが、成分の変換式で表現する方がわかりやすいかも知れない。

$$T^{\mu'\nu'} = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} T^{mn} \quad (1.42)$$

なお、この式は直積の定義より容易に導くことができる。

$$\begin{aligned} T &= T^{mn} e_m \otimes e_n = T^{mn} (\partial_m^{\mu'} e_{\mu'}) \otimes (\partial_n^{\nu'} e_{\nu'}) = (\partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} T^{mn}) e_{\mu'} \otimes e_{\nu'} \\ &= T^{\mu'\nu'} e_{\mu'} \otimes e_{\nu'} \end{aligned}$$

計量テンソル g も、二つの基底から定義され、その成分が $g_{\mu'\nu'} = \partial_{\mu'}^m \partial_{\nu'}^n g_{mn}$ と二つの反変変換係数の組合せで変換できることから、テンソルの反変成分の代表例である。また応力テンソル T も 2 階のテンソルである。

サフィックスが三つで、かつ基底の変換係数の組合せで変換できる量、例えば $T = T^{mnk} e_m \otimes e_n \otimes e_k$ は 3 階のテンソルである。この類推から、ベクトルは 1 階のテンソルであり、内積などのスカラー (不変量) は 0 階のテンソルである。そうした用語を使う著者も多い。

[例 2.7] [二次元極座標系] 任意ベクトル A の順変換式は前節の例 3 に示した dx の順変換式と同じ形になる。

$$\begin{aligned} A^{r'} &= \cos \phi' A^x + \sin \phi' A^y \\ A^{\phi'} &= -(\sin \phi' / r') A^x + (\cos \phi' / r') A^y \end{aligned} \quad (1.43)$$

同様に逆変換式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A^x &= \cos \phi' A^{r'} - r' \sin \phi' A^{\phi'} \\ A^y &= -\sin \phi' A^{r'} + r' \cos \phi' A^{\phi'} \end{aligned} \quad (1.44)$$

[例 2.8] [球面座標系] 任意ベクトル A の変換式は前節の例 4 に示した dx の変換式と同じ形になる。

$$\begin{aligned} A^x &= a \cos \theta' \cos \phi' A^{\theta'} - a \sin \theta' \sin \phi' A^{\phi'} \\ A^y &= -a \cos \theta' \sin \phi' A^{\theta'} + a \sin \theta' \cos \phi' A^{\phi'} \\ A^z &= -a \sin \theta' A^{\theta'} \end{aligned} \quad (1.45)$$

逆変換はできない。

[例 2.9] [ミンコウスキー空間] 特殊相対性理論における変換先の座標系は、典型的な直線座標系である。変換先の座標系から元の座標系への順変換式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + \beta x'/c) \end{aligned} \quad (1.46)$$

これらの式から共変変換係数 $\partial_{\mu'}^m$ を m 行 μ' 列の行列で表すと次のようになる。

$$\{\partial_{\mu'}^m\} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

これから目標座標系の基底は、次のようになる。なお、以後の議論ではあまり本質的でない y 、 z 成分を省略している。合せて $\beta = 0.6$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/0.8 = 1.25$ 、 $c = 2$ (本当は $3 \times 10^8 \text{m/s}$) を前提とした数値も示した。

$$\begin{aligned} e_{x'} &= \gamma e_x + (\gamma\beta/c) e_t = 1.25 e_x + 0.375 e_t \\ e_{t'} &= \gamma\beta c e_x + \gamma e_t = 1.5 e_x + 1.25 e_t \end{aligned} \quad (1.48)$$

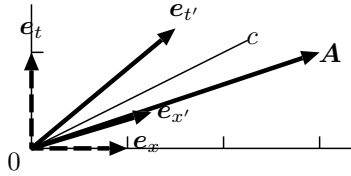


図 1.1 自然基底の変換とベクトル (反変成分を推定せよ)

これら基底を図 1.1 に示した。

また、順変換式より反変変換係数が得られる (μ 行 m 列)。

$$(\{\partial_{\mu'}^m\}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta c \\ -\gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

図中、基準座標系で $(3, 1)$ の値を持つ A なるベクトルが、直線座標系で次のような成分を持つことが、おおよそ読み取れよう。

$$\begin{aligned} (\{A^{\mu'}\}) &= \begin{pmatrix} A^{x'} \\ A^{t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta c \\ -\gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^x \\ A^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.25 & -1.5 \\ -0.375 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 0.125 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.50)$$

$g_{\mu'\nu'}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\{g_{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_{\mu'}^m\}) (\{g_{mn}\}) (\{\partial_{\nu'}^n\}) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ \gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ \gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.51) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ \gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ -\gamma\beta c & -\gamma c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

結果を見ると基準座標系の g_{mn} と同じ形になる。これは当然の結果である。元々、ローレンツ変換は、この計量テンソルが維持されるように選ばれたからである。

基準座標系の計量テンソルとして、これ以外のものを仮定すると、通常の直線座標系への変換のように、やや複雑な計量テンソルが得ら

れる。例えば、物理的意味はないが、 $g_{mn} = \delta_{mn}$ としてみると、

$$\begin{aligned}(\{g_{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_{\mu'}^m\}) (\{\delta_{mn}\}) (\{\partial_{\nu'}^n\}) = (\{\partial_{\mu'}^m\}) (\{\partial_{\nu'}^m\}) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ \gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta c \\ \gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 + (\beta/c)^2 & \beta c + \beta/c \\ \beta c + \beta/c & 1 + (\beta c)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と、非対角要素も入ったかなりひどい形となる。

第 2 章

双対座標系

リーマン幾何学では、基底の長さが 1 とは限らないため、計量テンソルが導入され、内積などの定義に、それが利用される。こうした計算を、さらに楽にするために導入された双対座標系という概念について説明する。

2.1 双対基底

リーマン幾何学では、基底の長さが 1 とは限らない。このため、ベクトルの内積や長さの計算に計量テンソルが必要であった。この面倒さを省くために導入されたのが双対基底という概念である。雰囲気を言えば、自然基底の逆数の長さを持つような基底である。

双対基底 (dual basis) $(\{e^m\})$ は厳密には次のように定義される。なお $(\{e_n\})$ は自然基底である。

$$e^m \cdot e_n = e_n \cdot e^m = \delta_n^m \quad (2.1)$$

e^m はすべての自然基底 e_n ($n \neq m$) に直交した方向をとり、さらに e_m の射影の逆数の長さを持つ。この結果、 $e_m \cdot e_n$ が必ずしも δ_{mn} となることが保証されていなかった自然基底に対し、双対基底 e^m を利用することにより、通常のベクトル空間と同様な式を確立することができたのである。

上式の最左辺と最右辺に、 $\partial_m^{\mu'} \partial_{\nu'}^n$ を掛ける。

$$(\partial_m^{\mu'} e^m) \cdot (\partial_{\nu'}^n e_n) = \partial_m^{\mu'} \partial_{\nu'}^n \delta_n^m = \partial_m^{\mu'} \partial_{\nu'}^m = \delta_{\nu'}^{\mu'}$$

自然基底の変換則はすでに分かっているのので、左辺の $\partial_{\nu'}^n e_n$ は $e_{\nu'}$ にしてよい。

$$\partial_m^{\mu'} e^m \cdot e_{\nu'} = \delta_{\nu'}^{\mu'}$$

さて、変換先の座標系でも、 $e^{\mu'} \cdot e_{\nu'} = \delta_{\nu'}^{\mu'}$ が成立するはずであり、この式を満す $e^{\mu'}$ は一意に決定されるはずである。これと比較すると、

$$e^{\mu'} = \partial_m^{\mu'} e^m \tag{2.2}$$

なる双対基底の順方向の生成式が得られる。順方向なのに、反変変換係数が使われている。生成規則が反変的な基底であるので、上付きのサフィックスを付ける。

この式から直ちに、双対基底の逆生成式も得られる。誘導は読者に一任する。

$$e^m = \partial_{\mu'}^m e^{\mu'} \tag{2.3}$$

2.2 双対座標系の計量テンソル

双対基底 e^m から新たな計量テンソル g^{mn} を定義することができる。

$$g^{mn} = e^m \cdot e^n \tag{2.4}$$

この g^{mn} の変換則は、双対基底の変換則を利用して求めることができる。

$$g^{\mu'\nu'} = e^{\mu'} \cdot e^{\nu'} = (\partial_m^{\mu'} e^m) \cdot (\partial_n^{\nu'} e^n) = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} (e^m \cdot e^n) = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} g^{mn} \tag{2.5}$$

この変換則からわかるように、 g^{mn} はテンソルの反変成分である。

計量テンソル g_m^n も定義できる。

$$g_m^n = e_m \cdot e^n = e^n \cdot e_m = \delta_m^n \quad (2.6)$$

g_m^n の変換則は、右辺を座標変換より得られる。

$$\begin{aligned} g_{\mu'}^{\nu'} &= e_{\mu'} \cdot e^{\nu'} = (\partial_{\mu'}^m e_m) \cdot (\partial_n^{\nu'} e^n) = \partial_{\mu'}^m \partial_n^{\nu'} (e_m \cdot e^n) \\ &= \partial_{\mu'}^m \partial_n^{\nu'} g_m^n (= \delta_{\mu'}^{\nu'}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここには、反変変換係数と共変変換係数が混ざって入っているため、 g_m^n はテンソルの混合成分である。

これで、計量テンソル g の共変成分 g_{mn} 、混合成分 g_m^n 、反変成分 g^{mn} が揃ったことになる。

2.3 共変ベクトル

この双対基底を使って、任意のベクトル A を展開してみよう。

$$A = A_m e^m \quad (2.8)$$

前節と同様な手順で、次の変換則が得られる。

$$A_{\mu'} = A_m \partial_{\mu'}^m \quad (2.9)$$

ベクトル A の e^m の成分 A_m は、自然基底 e_m と同じ変換を受けるため、ベクトルの共変成分 (covariant component) と呼ばれ、下付きのサフィックスを付ける。なお、ベクトルの共変成分は、他書では共変ベクトル (covariant vector) と記載されているが、本書ではその意味を考え、あえて共変成分と表現した。

式 2.9 の $\partial_{\mu'}^m$ を m 行 μ' 列の行列に対応させると、 $A_{\mu'}$ などは横ベ

クトルに対応させるべきである。

$$\begin{aligned} (\{A_{\mu'}\})^T &= (\{A_m\})^T (\{\partial_{\mu'}^m\}) \\ &= (A_{1'}, \dots, A_{N'}) = (A_1, \dots, A_N) \begin{pmatrix} \partial_{1'}^1 & \cdots & \partial_{N'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1'}^N & \cdots & \partial_{N'}^N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

どんなベクトルからも、反変成分も共変成分も求めることができる。例えば、微小ベクトル dx も自然基底 e_m で展開せずに、双対基底 e^m で展開すれば、共変成分 dx_m が得られる。

$$dx = dx_m e^m \quad (2.11)$$

元々、共変成分を使ってベクトルを定義した方がよいものとして、任意のスカラー関数 f の空間微分商がある。^{*1}これは、自然基底が分母に入るからである。 $\partial_m f = \partial f / \partial x^m$ を変換してみよう。

$$\partial_{\mu'} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} = (\partial_m f) \partial_{\mu'}^m \quad (2.12)$$

これが、 $\partial_m f$ の順変換である。この式を式 2.9 と比較してみると、同じ形をしており、変換係数が、共変変換係数になっていることに着目してほしい。このため、 $\partial_m f$ は共変成分としての変換を受ける。逆変換は次のようになる。

$$\partial_m f = (\partial_{\mu'} f) \partial_m^{\mu'} \quad (2.13)$$

詳細は次節で説明するが、 $\partial_m f$ から反変成分を求めることも可能である。その場合には $\partial^m f$ と書き、反変成分となる。

^{*1} ただ微分と呼ぶと、 df も df/dx のいずれを指すかがわからないので、 df のような微量を微分、 df/dx のような微分演算の結果を微分商と呼ぶこととする。

2.4 降階、昇階と内積

計量テンソルの共変成分 g_{mn} や反変成分 g^{mn} には、便利な機能がある。それはベクトルやテンソルの共変や反変を自由に変更できるのである。まず計量テンソルの共変成分 g_{mn} を使うと、ベクトルの反変成分から共変成分を得ることができる。

$$g_{mn} A^n = (e_m \cdot e_n) A^n = e_m \cdot A = e_m \cdot (A_n e^n) = \delta_m^n A_n = A_m \quad (2.14)$$

上付きサフィックスを下付きにしたということで、降階 (lowering) ともいう。さらに、計量テンソルの反変成分 g^{mn} を使うと、ベクトルの共変成分から反変成分を得ることができる。

$$g^{mn} A_n = (e^m \cdot e^n) A_n = e^m \cdot A = e^m \cdot (A^n e_n) = \delta_n^m A^n = A^m \quad (2.15)$$

下付きサフィックスを上付きにしたということで、昇階 (raising) ともいう。これらの作業はテンソルについても適用可能である。以後の議論で分かるように、いろいろな計算が、いちいち変換係数を用いなくても計量テンソルからだけできるようになるため、きわめて便利である。

微分商 $\partial_m f$ も共変成分であるので、昇階可能であり、 $\partial^m f = g^{mn} \partial_n f$ で定義される。これを簡略化して、しばしば $\partial^m = g^{mn} \partial_n$ と記載されるが、ベクトルの偏微分などでは、こううまくはいかないので注意して欲しい。

例えば、計量テンソル自身も2階のテンソルであるので、 g^{mn} や g_{mn} を用いて、昇階や降階ができる。 g_{mn} を g^{mn} を用いて一階昇階すると g_m^n 、もう一階昇階すると g^{mn} が得られる。逆も成立する。最初の昇階の式を見てみると、 $g_m^n = \delta_m^n$ なので、 $(\{g^{mn}\})$ と $(\{g_{mn}\})$ が互いに逆行列であることが言える。さらに、 $(\{g^{\mu'\nu'}\})$ と $(\{g_{\mu'\nu'}\})$ も互いに逆行列である。これらは簡単に証明できるので、各人でトライしてほしい。

成分の変換のされ方でサフィックスの上下を付けるので、 T_{mn} 、 T_m^n 、 T^{mn} はそれぞれ、テンソルの共変成分、混合成分、反変成分と呼ばれる。次の節

で示すように、これらのいずれか一つがわかっていると、他の成分は計算可能である。

任意の二つのベクトルに対し、 A を e_m で、 B を e_n で展開することにより、内積を次式の形で求めることができる。

$$A \cdot B = (A^m e_m) \cdot (B^n e_n) = g_{mn} A^m B^n \quad (2.16)$$

となる。同様な手法により、次の式を証明できる。

$$A \cdot B = g^{mn} A_m B_n \quad (2.17)$$

A を e_m で、 B を e^n で展開することにより、同じ内積を次式の形で求めることもできる。

$$A \cdot B = (A^m e_m) \cdot (B_n e^n) = \delta_m^n A^m B_n = A^m B_m \quad (2.18)$$

となる。同様に

$$A \cdot B = (A_m e^m) \cdot (B^n e_n) = \delta_n^m A_m B^n = A_m B^m \quad (2.19)$$

最後の二式には計量テンソルは見掛け現われてこない。^{*2}

B を A とすることで、ベクトルの二乗長の計算式が得られる。

$$A \cdot A = g_{mn} A^m A^n = g^{mn} A_m A_n = A^m A_m \quad (2.20)$$

以上の内積に関する複数の式は、 m, n を μ, ν に置き換えてもすべて成立する。つまり、内積は座標変換に対し不変となる。

最後に、 $g_{\mu'\nu'}$ の行列式 $|\{g_{\mu'\nu'}\}|$ について議論しておこう。

$$|\{g_{\mu'\nu'}\}| = |\{\partial_{\mu'}^m \partial_{\nu'}^n g_{mn}\}| = |\{\partial_{\mu'}^m\}| |\{\partial_{\nu'}^n\}| |\{(g_{mn})\}|$$

行列式はたった一つの値しか持たないので、厳密にはサフィックスを付けるのはおかしい。そこで、以後はなるべく $g_{\nu'}$ のように表現しよう。つまり、

$$g_{\nu'} = J^2 g \quad (2.21)$$

^{*2} 実は内積をこの式のように簡単な形にするために、共変、反変という概念が導入されたのである。

ただし、 J はヤコビ行列 $\{\partial_{\mu'}^m\}$ の行列式であり、ヤコビアン (Jacobian) と呼ばれる。これから

$$\sqrt{g_{\mu'\nu'}} = J, \sqrt{g} \quad (2.22)$$

相対論で扱う空間では $g_{\mu'\nu'}$ や g などは負となる。こうした場合には上式の代わりに次式を用いることとする。

$$\sqrt{-g_{\mu'\nu'}} = J, \sqrt{-g} \quad (2.23)$$

これから、次式で定義される体積要素が不変量であることが示される (必要に応じ負号を入れる)。

$$dV' = \sqrt{g_{\mu'\nu'}} dx^{1'} \cdots dx^{4'} = \sqrt{g} J, dx^{1'} \cdots dx^{4'} = \sqrt{g} dx^1 \cdots dx^4 = dV \quad (2.24)$$

ここで、次式に示す関係を利用した。まず 2 次元空間では、 $dx^1 dx^2 = J, dx^{1'} dx^{2'}$ が成立する。それは $dx^{1'} \times dx^{2'}$ の作る四角形の面積が、 $(\{x^m\})$ 空間に変換されると、平行四辺形となると同時にその面積が J 倍になるからである。これを拡張すると、一般に、多重微分要素間には次式が成立する。

$$dx^1 dx^2 \cdots dx^N = J, dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{N'} \quad (2.25)$$

[例 3.1] [二次元極座標系] 自然基底については、例 2.5 に示した変換式が成立する。

$$\begin{aligned} e_{r'} &= \cos \phi' e_x + \sin \phi' e_y \\ e_{\phi'} &= -r' \sin \phi' e_x + r' \cos \phi' e_y \end{aligned}$$

双対基底はこれらと正規直交性が成立しないといけな。簡単に言えば、同じ方向を向き、長さが逆数のベクトルを定義すればよい。

$$\begin{aligned} e^{r'} &= \cos \phi' e^x + \sin \phi' e^y \\ e^{\phi'} &= -(\sin \phi' / r') e^x + (\cos \phi' / r') e^y \end{aligned} \quad (2.26)$$

またベクトルの共変成分の変換式は自然基底の変換式と同じになる。

$$\begin{aligned} A_{r'} &= \cos \phi' A_x - r' \sin \phi' A_y \\ A_{\phi'} &= \sin \phi' A_x + r' \cos \phi' A_y \end{aligned} \quad (2.27)$$

$g^{\mu'\nu'}$ を求めてみよう (μ', ν' は極座標側)。

$$\begin{aligned} (\{g^{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_m^{\mu'}\}) (\{g^{mn}\}) (\{\partial_n^{\nu'}\}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi' & \sin \phi' \\ -\sin \phi'/r' & \cos \phi'/r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi' & \sin \phi' \\ -\sin \phi'/r' & \cos \phi'/r' \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r'^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

これは、 $e^{r'}$ の長さが 1 なのに対し、 $e^{\phi'}$ の長さは $1/r'$ であること、それ故、ベクトルの長さに対し、 $A_{\phi'}$ は $1/r'$ 倍の寄与があることを示している。

前節の例とこの例に対し、 r' が極めて大きい場合の略図を描くことにより、自然基底と双対基底の直交関係や任意ベクトルの成分の概要を理解することができるので、ぜひトライしてほしい。

[例 3.2] [球面座標系] 自然基底については、例 2.6 に示した変換式が成立する。

$$\begin{aligned} e_{\theta'} &= a \cos \theta' \cos \phi' e_x + a \cos \theta' \sin \phi' e_y - a \sin \theta' e_z \\ e_{\phi'} &= -a \sin \theta' \sin \phi' e_x + a \sin \theta' \cos \phi' e_y \end{aligned}$$

これらの逆変換は存在しない。したがって双対基底については、順変換はなく、これらの係数で逆変換を受けることとなる。

$$\begin{aligned} e^x &= a \cos \theta' \cos \phi' e^{\theta'} - a \sin \theta' \sin \phi' e^{\phi'} \\ e^y &= a \cos \theta' \sin \phi' e^{\theta'} + a \sin \theta' \cos \phi' e^{\phi'} \\ e^z &= -a \sin \theta' e^{\theta'} \end{aligned} \quad (2.29)$$

ベクトルの共変成分については、自然基底の順変換と同じ変換式と

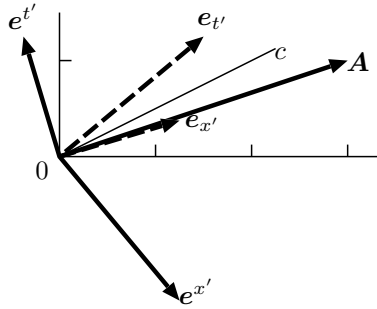


図 2.1 双対基底と自然基底 (ベクトルの共変成分と反変成分に着目)

なる。

$$\begin{aligned} A_{\theta'} &= a \cos \theta' \cos \phi' A_x + a \cos \theta' \sin \phi' A_y - a \sin \theta' A_z \\ A_{\phi'} &= -a \sin \theta' \sin \phi' A_x + a \sin \theta' \cos \phi' A_y \end{aligned} \quad (2.30)$$

これらの逆変換はない。

$g^{\mu'\nu'}$ は $\partial_M^{\mu'}$ などが決まらないため、 $\partial_M^{\mu'} g^{MN} \partial_N^{\nu'}$ からは計算できない。しかし、 $(\{g_{\mu'\nu'}\})$ の逆行列としては計算可能である。

$$(\{g^{\mu'\nu'}\}) = (\{g_{\mu'\nu'}\})^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \theta' \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

[例 3.3] [ミンコウスキー空間] 図 1.1 に示した相対論の例を使って、双対基底とベクトルの共変成分に対する具体的なイメージを掴もう。あまり本質的でない y, z 成分を省略する。双対基底は $\partial_m^{\mu'} e^n$ で計算できる。

$$\begin{aligned} e^{x'} &= \gamma e^x - \gamma\beta c e^t = 1.25 e^x - 1.5 e^t \\ e^{t'} &= -(\gamma\beta/c) e^x + \gamma e^t = -0.375 e^x + 1.25 e^t \end{aligned} \quad (2.32)$$

これらを図 2.1 に示すが、 $(e^{\mu'})$ が $(e_{\mu'})$ に対し直交していることがよく分かる。

また、基準座標系で $(3, 1)$ の値を持つ A なるベクトルが、双対座標系で次のような大きな成分を持つことも、おおよそ読み取れよう。

$$(\{A_{\mu'}\})^T = (\{\partial_{\mu'}^m A_m\}) = (3 \ 1) \begin{pmatrix} 1.25 & 1.5 \\ 0.375 & 1.25 \end{pmatrix} = (4.125 \ 5.75) \quad (2.33)$$

これから A の二乗長を計算することができる。

$$A^{\mu'} A_{\mu'} = 2.25 \times 4.125 + 0.125 \times 5.75 = 10 = 1^2 + 3^2 \quad (2.34)$$

$g^{\mu'\nu'}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\{g^{\mu'\nu'}\}) &= (\{\partial_m^{\mu'} g^{mn} \partial_n^{\nu'}\}) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta c \\ -\gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta c \\ -\gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta/c \\ -\gamma\beta/c & -\gamma/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta c \\ -\gamma\beta/c & \gamma \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix} \quad (2.35) \end{aligned}$$

ということで、 g^{mn} と一致する。

さらに、 $g_{\mu'\nu'}$ の昇階と言ってもよいし、 $g^{\mu'\nu'}$ の降階と言ってもよいが、 $g_{\mu'\kappa'} g^{\kappa'\nu'}$ を計算すると、期待通り $\delta_{\mu'}^{\nu'}$ が得られる。

[例 3.4] [勾配ベクトル] 空間微分商の直感的理解を得るために、図 2.2 を見てほしい。先と同じ直線座標系で、今度は f の等高線が記載してある。まず、基準座標系では e_1 方向に 1 動くとき f は 3 増えるから、 $\partial f/\partial x^1 = 3$ 、また e_2 方向に 1 動くとき f は 1 増えるから、 $\partial f/\partial x^2$ は 1 である。このため基準座標系におけるベクトルは $(3, 1)$ である。

変換後の直線座標系では、自然基底の e_1 方向へ 3 移動すると f は 4.125 増え、 e_2 方向へ 3 移動すると f は 5.75 増えるので、 $\partial f/\partial x^{1'} = 4.125$ 、 $\partial f/\partial x^{2'} = 5.75$ である。しかし自然基底で見ると $(4.125, 5.75)$ なるベクトルは元のベクトルとは一致しない。これを双対基底系の $(4.125, 5.75)$ ベクトルだと思つて一致するのである。

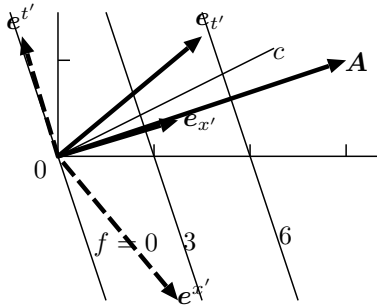


図 2.2 スカラー関数の微分は共变的である

反変の微分 $\partial^m f (= g^{mn} \partial_n f)$ は双対基底の方へ移動することで、その成分を計算することができ、上記と同様の考察が可能である。作業は読者に任せる。

第 3 章

共変微分

これまでの議論は、固定した一点におけるベクトルやテンソルが、座標変換によってどう変化するかについて行った。したがって、空間が曲っていようが、直線座標系やデカルト座標系のように真っ直だろうが、余り関係のない議論を行ってきた。ところが、位置を移動しはじめると、空間の曲がりの影響が現われてくる。こうした位置を移動したとき、ベクトルやテンソルがどう変化するかについて論じよう。これらの微分も位置移動した結果の差分であるため、位置微分に関する議論であるといってもよいだろう。

3.1 平行移動

リーマン幾何学において重要なのは、与えられた空間を移動することによるベクトルの変化である。デカルト座標系では、ベクトルをいくら平行に移動しても、元の位置へ戻れば元のベクトルに一致する。ところが球面座標系でベクトルを球面内を出ないように平行移動すると、おかしいことが起る。例えば地球の中心から北緯 0° 、東経 0° の方向を x 軸、北緯 0° 、東経 90° の方向を y 軸、北極の方向を z 軸としよう。北緯 0° 、東経 0° にある y 軸を向いたベクトルを赤道に沿って北緯 0° 、東経 90° まで球面からベクトルが飛び出さないように移動すると、ベクトルは $-x$ 軸を向く。次にそれを真北

に北極まで平行移動すると $-x$ 軸を向いたままである。最後にそれを経線に沿って北緯 0° 、東経 0° まで平行移動してくると、ベクトルは z 軸を向く。つまり、ベクトルを元の位置にまで平行移動しても、平行になるとは限らないのである。

こうした議論を正確に行うには、ベクトルの平行移動 (translation) を厳密に定義しなければならない。二次元の世界である球面座標系は、三次元のデカルト座標系から見ると、曲り具合がよくわかる。それと同じように、どんな座標系でも、対象とする点の近傍に限れば、適切にやや多めの次元を持つ座標系を用意することにより、歪の具合をきれいに記述することができることが知られている。

場所 x で定義された任意のベクトルを $A(x)$ としよう。これを場所 $x+dx$ まで、対象とする曲線座標系からはみ出さないように平行移動した結果を $A_{\parallel}(x \rightarrow x+dx)$ としよう。このベクトルは明かに元の $A(x)$ を $x+dx$ の位置にコピーしたもの $A(x \rightarrow x+dx) = A(x)$ とは僅かに異なる。その差を $A_{\perp}(x \rightarrow x+dx)$ とすると、

$$A(x \rightarrow x+dx) = A(x) = A_{\parallel}(x \rightarrow x+dx) + A_{\perp}(x \rightarrow x+dx) \quad (3.1)$$

が成立する。 $A_{\parallel}(x \rightarrow x+dx)$ は対象とする座標系内のベクトルであるから、 $A_{\perp}(x \rightarrow x+dx)$ は対象とする座標系をはみ出すベクトルである。これが、対象とする座標系に垂直になるとき、 $A_{\parallel}(x \rightarrow x+dx)$ は平行移動されたベクトルであると定義する。

$$A_{\perp}(x \rightarrow x+dx) \cdot e_m = 0 \quad (3.2)$$

または、

$$A_{\perp}(x \rightarrow x+dx) \cdot e^m = 0 \quad (3.3)$$

がすべての m に対して成立するとき、 $A_{\parallel}(x \rightarrow x+dx)$ は平行移動されたベクトルと言える。つまり、平行移動とは、僅かに離れた位置にベクトルをコピーし、その射影である。

なお、平行移動の際、 dx を大きくすると、平行移動ベクトルの長さが変化してしまう。例えば北緯 0° 東経 90° において東を向いたベクトルを、北緯 0° 東経 90° の位置にコピーし、その射影をとると、長さ 0 のベクトルになってしまう。しかし、これを僅かな距離ずつ行なっていけば、期待通りの平行移動が達成できる。

3.2 基底の平行移動と接続係数

基底もベクトルであるので、平行移動ができる。しかし、移動先の基底は別の原理で定義されているので、これらは一致しない。なお、本節では、説明の都合上、 x からの移動ではなく、基底を $x + dx$ から x へ平行移動する場合を考える。例えば、北緯 45° 東経 10° にある東向きの基底を北緯 45° 東経 0° へコピーすると、明かに先端が地表から 10° 沈み、さらに、少し北に向いたベクトルになる。したがって、この射影は、ほぼ東を向いているが、若干北向きである。一方、この位置における基底は相変わらず東向きに定義されている。このように、他所から平行移動した基底と、その場所における基底とは異なるのが一般である。

以後、平行移動した基底と、その場所における基底の関係を式で調べてみよう。まず、基底 $e_m(x + dx)$ を場所 x にコピーしたもの（これも $e_m(x + dx)$ である）と、同じ基底を平行移動した $e_{||m}(x + dx \rightarrow x)$ の関係は次のようになる。

$$e_m(x + dx) = e_{||m}(x + dx \rightarrow x) + e_{\perp m}(x + dx \rightarrow x) \quad (3.4)$$

$e_{||m}(x + dx \rightarrow x)$ は、場所 x における基底 $e_m(x)$ に近いベクトルであるが、若干のずれがある。移動量が少いとき、そのずれは移動量に比例して大きくなるので、 x における基底で展開して次のように表すことができる。一次の微小量まで書くと、次式のようなになる。

$$e_{||m}(x + dx \rightarrow x) = e_m(x) + dx^k \Gamma_{km}^n(x) e_n(x) \quad (3.5)$$

比例係数 $\Gamma_{km}^n(x)$ は、局所的なアフィン変換 (affine transform) を繋いでいく係数という意味で、アフィン接続係数 (affine connection coefficient)、または単に接続係数 (connection coefficient) と呼ばれる。

式 3.5 を式 3.4 に代入し、 $e_m(x+dx) - e_m(x) = dx^k \partial_k e_m(x)$ を利用すると、

$$dx^k \partial_k e_m(x) = dx^k \Gamma_{km}^n(x) e_n(x) + e_{\perp m}(x \rightarrow x+dx) \quad (3.6)$$

が得られ、両辺に $e^l(x)$ を掛けて、 $l \rightarrow n$ とすることで次式が得られる。

$$\Gamma_{km}^n(x) = e^n(x) \cdot \partial_k e_m(x) \quad (3.7)$$

が得られる。これから $\Gamma_{km}^n(x)$ を具体的に計算としても、必ずしも容易ではない。それは、右辺にベクトルという抽象的な概念の微分商の計算が入っているからである。しかし、次節に示すように、この式を手掛かりに、具体的な計算手法を得ることができる。

何故、こんなややこしい量を導入しなければならないかという、そのヒントは式 3.5 にある。例えばベクトルの微分を行うときには、 $x+dx$ における量の処理を x において行うことになる。そのとき、基底として $e_m(x+dx)$ を用いると、得られた結果は、対象としている空間を飛び出してしまい、同じ空間内で処理できなくなってしまう。これを避けるには、 $e_{||m}(x \rightarrow x+dx)$ を使うのがよく、そのためにこの平行移動した基底を容易に得られるようにしておく必要があるのである。

つまり、次式で与えられる基底の全微分 (total derivative)

$$de_m(x) = e_m(x+dx) - e_m(x) = dx^k \partial_k e_m(x) \quad (3.8)$$

は ($\{e_m(x)\}$) で表現できないことがあるが、次の量

$$\delta e_m(x) = e_{||m}(x+dx \rightarrow x) - e_m(x) = dx^k \Gamma_{km}^n(x) e_n(x) \quad (3.9)$$

は ($\{e_m(x)\}$) で表現できるということである。これを基底の完全微分 (exact derivative) と呼ぼう。

双対基底の位置変化については

$$e_{\parallel}^{m'}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}) = e^{m'}(\boldsymbol{x}) + dx^k \Gamma_{kn'}^{m'}(\boldsymbol{x}) e^{n'}(\boldsymbol{x})$$

のような展開式を仮定する。この文節では、プライムはもちろん変換先座標ではなく、双対基底に対するものに付けている。これと式 3.5 との辺々内積をとって一次の微小量までを求める。 $e_{\parallel}^{m'} \cdot e_{\parallel m} = \delta_m^{m'}$ 、 $e^{n'} \cdot e_n = \delta_n^{n'}$ を利用しすると、

$$\delta_m^{m'} = \delta_m^{m'} + dx^k \Gamma_{kn'}^{m'}(\boldsymbol{x}) \delta_m^{n'} + dx^k \Gamma_{km}^n(\boldsymbol{x}) \delta_n^{n'}$$

したがって、両辺からデルタ関数を消し、 $m \rightarrow n$ 、 $m' \rightarrow m$ とすると

$$\Gamma_{kn}^m(\boldsymbol{x}) = -\Gamma_{kn}^m(\boldsymbol{x}) \quad (3.10)$$

が得られる。これから、自然基底の場合と同様に、次の式が得られる。

$$\delta e^m(\boldsymbol{x}) = e_{\parallel}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}) - e^m(\boldsymbol{x}) = -dx^k \Gamma_{kn}^m(\boldsymbol{x}) e^n(\boldsymbol{x}) \quad (3.11)$$

さらに、

$$de^m(\boldsymbol{x}) = e^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - e^m(\boldsymbol{x}) = dx^k \partial_k e^m(\boldsymbol{x}) \quad (3.12)$$

を利用して、次式を得、

$$\begin{aligned} dx^k \partial_k e^m(\boldsymbol{x}) &= e^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - e^m(\boldsymbol{x}) = e_{\parallel}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) + e_{\perp}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - e^m(\boldsymbol{x}) \\ &= -dx^k \Gamma_{kn}^m(\boldsymbol{x}) e^n(\boldsymbol{x}) + e_{\perp}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

この両辺に e_l を掛けて後、 $l \rightarrow n$ とすると、次式が得られる。

$$\Gamma_{kn}^m(\boldsymbol{x}) = -e_n(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_k e^m(\boldsymbol{x}) \quad (3.13)$$

続いて、式 3.7 を利用して接続係数の座標変換を求めよう。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(\boldsymbol{x}) &= e^{\nu'}(\boldsymbol{x}) \partial_{\kappa'} e_{\mu'}(\boldsymbol{x}) = \partial_n^{\nu'} e^n(\boldsymbol{x}) \partial_{\kappa'} (\partial_{\mu'}^m e_m(\boldsymbol{x})) \\ &= \partial_n^{\nu'} e^n(\boldsymbol{x}) (\partial_{\kappa'\mu'}^m e_m(\boldsymbol{x}) + \partial_{\mu'}^m \partial_{\kappa'}^k \partial_k e_m(\boldsymbol{x})) \\ &= \partial_n^{\nu'} \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^m \Gamma_{km}^n(\boldsymbol{x}) + \partial_m^{\nu'} \partial_{\kappa'\mu'}^m \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、 $\partial_{\kappa'\mu'}^m$ は二階偏微分商 $\partial^2 x^m / \partial x^{\kappa'} \partial x^{\mu'}$ である。右辺第2項があるため、接続係数はテンソルではない。

この式に、 κ' と μ' を入替えた式を加減算すると、次の二式が得られる。

$$\frac{1}{2} \left[\Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(\mathbf{x}) + \Gamma_{\mu'\kappa'}^{\nu'}(\mathbf{x}) \right] = \partial_n^{\nu'} \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^m \frac{1}{2} \left[\Gamma_{km}^n(\mathbf{x}) + \Gamma_{mk}^n(\mathbf{x}) \right] + \partial_m^{\nu'} \partial_{\kappa'\mu'}^m \quad (3.15)$$

$$\left[\Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(\mathbf{x}) - \Gamma_{\mu'\kappa'}^{\nu'}(\mathbf{x}) \right] = \partial_n^{\nu'} \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^m \left[\Gamma_{km}^n(\mathbf{x}) - \Gamma_{mk}^n(\mathbf{x}) \right] \quad (3.16)$$

つまり、非対称部分はテンソルである。したがって、どこかの系でこれが0ならば、その変換先の系では常に0となる。幸いにして、我々の扱う多くの曲線座標系は、非対称部分0のデカルト座標系、またはミンコフスキー空間の中に構築されたものが多いので、以後、非対称部分は0の対称性を仮定して議論を行う。一方、対称部分はテンソルではない。したがって、系によっては値を有していても、系によっては0にできる。もちろん、この話は局所的であり、大域的に0にできる保証はない。

例えば、 S_{km}^n を3階の k と m に関して対称で、さらに場所に依存しない一定のテンソルとして、次のような変換をしてみよう。

$$(x^{\nu'} - x_0^{\nu'}) = \delta_l^{\nu'} \left[(x^l - x_0^l) + S_{km}^l (x^k - x_0^k)(x^m - x_0^m) + O^3 \right] \quad (3.17)$$

これから逆変換は

$$(x^n - x_0^n) = \delta_{\nu'}^n (x^{\nu'} - x_0^{\nu'}) - S_{km}^n \delta_{\kappa'}^k \delta_{\mu'}^m (x^{\kappa'} - x_0^{\kappa'}) (x^{\mu'} - x_0^{\mu'}) + O^3 \quad (3.18)$$

となる。これらから、

$$\begin{aligned} \partial_n^{\nu'} &= \delta_n^{\nu'} + 2\delta_l^{\nu'} S_{km}^l \delta_n^m (x^k - x_0^k) \\ \partial_{\nu'}^n &= \delta_{\nu'}^n - 2S_{km}^n \delta_{\kappa'}^k \delta_{\nu'}^m (x^{\kappa'} - x_0^{\kappa'}) \end{aligned}$$

などが得られ、さらに $x = x_0$ において、

$$\begin{aligned}\partial_n^{\nu'} &= \delta_n^{\nu'} \\ \partial_{\kappa'}^k &= \delta_{\kappa'}^k \\ \partial_n^{\mu'} \partial_{\kappa'\nu'}^n &= -2\delta_n^{\mu'} \delta_{\kappa'}^k \delta_{\nu'}^m S_{km}^n\end{aligned}$$

となるので、これらを式 3.15 に代入し、接続係数の対称性を仮定すると、

$$\Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(\mathbf{x}) = \delta_n^{\mu'} \delta_{\kappa'}^k \delta_{\nu'}^m (\Gamma_{km}^n(\mathbf{x}) - 2S_{km}^n)$$

したがって、 $S_{km}^n = \Gamma_{km}^n(x_0)/2$ とすると、 $\Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(x_0) = 0$ とでき、接続係数の対称部分を消しすることができる。このような接続係数の対称部分 0 の座標系を測地座標系 (geodesic coordinate system) と呼ぶ。

なお、式 3.14 と同じ内容を持つ次式は、しばしば利用されるので掲載しておく。

$$\partial_{\kappa'\mu'}^m = \partial_{\nu'}^m \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'}(\mathbf{x}) - \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^n \Gamma_{kn}^m(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

例えば、これを利用して次のことが示される。基底の全微分を座標変換してみよう。

$$\begin{aligned}de_{\mu'} &= dx^{\kappa'} \partial_{\kappa'} e_{\mu'} = \partial_k^{\kappa'} dx^k \partial_{\kappa'}^i \partial_i (\partial_{\mu'}^m e_m) \\ &= dx^k \partial_k (\partial_{\mu'}^m e_m) = \partial_{\mu'}^m dx^k \partial_k e_m + dx^k \partial_{k\mu'}^m e_m\end{aligned}$$

のように、右辺第二項があるため、座標変換に対し不変ではない。しかし、この右辺第二項をさらに式 3.19 を利用するなどして、変形していこう。

$$\begin{aligned}dx^k \partial_{k\mu'}^m e_m &= dx^k \partial_k^{\kappa'} \partial_{\kappa'\mu'}^m e_m = \partial_k^{\kappa'} dx^k (\partial_{\nu'}^m \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'} - \partial_{\kappa'}^i \partial_{\mu'}^j \Gamma_{ij}^m) e_m \\ &= dx^{\kappa'} \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'} e_{\nu'} - \partial_{\mu'}^m dx^k \Gamma_{km}^n e_n\end{aligned}$$

この式を一つ前の式へ代入し、第二項を左辺へ移項すると、

$$dx^{\kappa'} \partial_{\kappa'} e_{\mu'} - dx^{\kappa'} \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'} e_{\nu'} = \partial_{\mu'}^m (dx^k \partial_k e_m - dx^k \Gamma_{km}^n e_n)$$

つまり、 $dx^k \partial_k e_m - dx^k \Gamma_{km}^n e_n = de_m - \delta e_m (= e_{\perp m}(\mathbf{x} + d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}))$ は座標変換に対し不変なベクトルであることがわかる。

3.3 計量テンソルと接続係数

式 3.7 により定義された接続係数 Γ_{km}^n は、高次元の直線座標系の情報がわかっていないと計算できず、かなり不便である。幸いにして接続係数の値は、部分空間の曲線座標系の計量テンソルから計算可能である。なお、接続係数の対称性を前提に議論を行う。まず式 3.7 の両辺に g_{nl} を掛けて降階してみよう。なお、以下の式変形で、 (x) は省略して記載する。

$$g_{nl} \Gamma_{km}^n = e_l \cdot \partial_k e_m \quad (3.20)$$

この式を利用して、次の三式が誘導できる。

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ml} &= \partial_k (e_m \cdot e_l) = \partial_k e_m \cdot e_l + e_m \cdot \partial_k e_l = g_{nl} \Gamma_{km}^n + g_{nm} \Gamma_{kl}^n \\ \partial_m g_{lk} &= g_{nk} \Gamma_{ml}^n + g_{nl} \Gamma_{mk}^n \\ \partial_l g_{km} &= g_{nm} \Gamma_{lk}^n + g_{nk} \Gamma_{lm}^n \end{aligned} \quad (3.21)$$

これらの式は、後に g_{mn} の変換の際利用されるが、上記 1 式 + 2 式 - 3 式を実行し、左右を入れ替えると、次式が得られる。

$$2g_{nl} \Gamma_{km}^n = \partial_k g_{ml} + \partial_m g_{lk} - \partial_l g_{km}$$

両辺を 2 で割り、左辺の g_{nl} を昇階すると、次の計量テンソルから接続係数を得る式が得られる。

$$\Gamma_{km}^n = \frac{1}{2} g^{nl} (\partial_k g_{ml} + \partial_m g_{lk} - \partial_l g_{km}) \quad (3.22)$$

これにより、いちいち高次元の直線座標系へ戻ることなく、議論ができる基盤ができたことになる。

なお、この式の右辺を次式のように書いて、クリストッフエル記号 (Christffel symbol) と言う。

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ km \end{matrix} \right\} \quad (= \Gamma_{km}^n) \quad (3.23)$$

つまり、対称系では接続係数はクリストッフェル記号と一致する。

ここで、接続係数の具体的な算出方法が確定したので、例を上げておこう。

[例 4.1] [二次元極座標系] まず、二次元極座標系の線素と接続係数の計算式を再掲しておこう。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

デカルト座標系に定義された曲線座標系は、デカルト座標系が対称系であるため、すべて対称系となる。したがって、接続係数はクリストッフェル記号で算定できる。二次元空間であるため、接続係数は $2 \times 2 \times 2 = 8$ 項しかない。

$$\Gamma_{mn}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_m g_{ln} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn})$$

$k = r$ であると、 g^{kl} の成分から見て、 $l = r$ としてよい。

$$\Gamma_{mn}^r = \frac{1}{2} (\partial_m g_{rn} + \partial_n g_{mr} - \partial_r g_{mn}) = -\frac{1}{2} \partial_r g_{\phi\phi} \delta_m^\phi \delta_n^\phi = -r \delta_m^\phi \delta_n^\phi$$

$k = \phi$ であると、 g^{kl} の成分から見て、 $l = \phi$ としてよい。

$$\Gamma_{mn}^\phi = \frac{1}{2r^2} (\partial_m g_{\phi n} + \partial_n g_{m\phi} - \partial_\phi g_{mn}) = \frac{1}{r} (\delta_m^r \delta_n^\phi + \delta_m^\phi \delta_n^r)$$

これらの結果をまとめると、次の 3 項目を除いて残りは 0 であることがわかる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = 1/r \end{aligned} \quad (3.24)$$

したがって、基底の完全微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta e_r &= dr (\Gamma_{rr}^r e_r + \Gamma_{rr}^\phi e_\phi) + d\phi (\Gamma_{\phi r}^r e_r + \Gamma_{\phi r}^\phi e_\phi) = d\phi (1/r) e_\phi \\ \delta e_\phi &= dr (\Gamma_{r\phi}^r e_r + \Gamma_{r\phi}^\phi e_\phi) + d\phi (\Gamma_{\phi\phi}^r e_r + \Gamma_{\phi\phi}^\phi e_\phi) \\ &= dr (1/r) e_\phi + d\phi (-r) e_r \end{aligned} \quad (3.25)$$

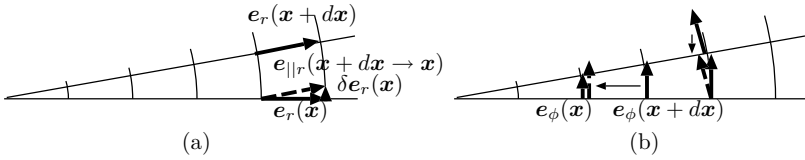


図 3.1 基底の位置による変動

これを図 3.1 に示そう。

(a) は e_r を $d\phi$ 動かした場合で、 $\phi + d\phi$ の位置にある基底と ϕ の位置にある基底を比較する際、 $\phi + d\phi$ の位置にある基底を平行移動し $e_{||r}(x + dx \rightarrow x)$ とし、それと比較をしている。その差である短いベクトルが $\delta e_r(x)$ である。 $\delta e_r(x)$ の長さは一定であるが、 e_ϕ の長さが r に比例するため、 $1/r$ の係数が付くのが理解できよう。この場合、 r 方向に移動しても、基底は変化しないので、図示していない。

(b) は e_ϕ の変動を示しているが、左の一组は r 方向へ移動したときの基底の変動を図示している。いつも ϕ 方向に一定の差が生じるが、 e_ϕ の長さが r に比例するため、 $1/r$ の係数が付く。(b) の右の一组は e_ϕ を ϕ 方向に移動した場合で、その差は e_r の負方向であり、 r に比例する。

[例 4.2] [球面座標系] まず、線素は

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

この座標系もデカルト座標系の上に定義された対称系であり、クリストッフェル記号が利用できる。二次元空間であるので、接続係数は $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個ある。 $k = \theta$ であると、 g^{kl} の成分から見て、 $l = \theta$ としてよい。

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}^\theta &= \frac{1}{2a^2} (\partial_m g_{\theta n} + \partial_n g_{m\theta} - \partial_\theta g_{mn}) = -\frac{1}{2a^2} \partial_\theta g_{mn} \\ &= -\sin \theta \cos \theta \delta_m^\phi \delta_n^\phi \end{aligned}$$

$k = \phi$ であると、 g^{kl} の成分から見て、 $l = \phi$ としてよい。

$$\begin{aligned}\Gamma_{mn}^{\phi} &= \frac{1}{2a^2 \sin^2 \theta} (\partial_m g_{\phi n} + \partial_n g_{m\phi} - \partial_{\phi} g_{mn}) \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} (\delta_m^{\theta} \delta_n^{\phi} + \delta_m^{\phi} \delta_n^{\theta})\end{aligned}$$

これらの結果をまとめると、次の 3 項目を除いて 0 であることがわかる。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta\end{aligned}\tag{3.26}$$

したがって、基底の完全微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta e_{\theta} &= d\theta (\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} e_{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} e_{\phi}) + d\phi (\Gamma_{\phi\theta}^{\theta} e_{\theta} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} e_{\phi}) \\ &= d\phi (\cos \theta / \sin \theta) e_{\phi} \\ \delta e_{\phi} &= d\theta (\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} e_{\theta} + \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} e_{\phi}) + d\phi (\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} e_{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} e_{\phi}) \\ &= d\theta (\cos \theta / \sin \theta) e_{\phi} + d\phi (-\sin \theta \cos \theta) e_{\theta}\end{aligned}$$

$\theta = 0$ の極付近では、二次元極座標に近い結果となるはずである。実際、二次元極座標の dr を θ に対応させると、同じ結果となる。また $\theta = \pi/2$ の赤道付近では、接続係数はすべて 0 となり、比較的平坦な空間と同様となる。

3.4 空間変化するベクトル場と共変微分

重力場、電磁場などに代表されるベクトル場は場所とともにゆっくり変動する。こうしたベクトル場 $A(x)$ の位置変動を調べよう。一般ベクトルについても、差分ベクトルを $dA(x)$ とするのは問題がある。 x の場所で差分をとるとして、 $A(x + dx)$ は、考えている空間の次元をはみ出す可能性があるからである。そこで、基底の移動と同様に、 $A(x + dx)$ を平行移動した

$A_{||}(x + dx \rightarrow x)$ を利用すればよい。これは $A(x + dx)$ を $e(x + dx \rightarrow x)$ で基底展開し、その成分を維持したまま、基底を平行移動してくることで求めることができる。

$$\begin{aligned} A_{||}(x + dx \rightarrow x) &= A_{||}^m(x + dx \rightarrow x) e_{||m}(x + dx \rightarrow x) \\ &= (A^m(x) + dA^m(x)) (e_m(x) + \delta e_m(x)) \\ &= A^m(x) e_m(x) + dA^m(x) e_m(x) + A^m(x) \delta e_m(x) \\ &= \mathbf{A}(x) + dA^m(x) e_m(x) + A^m(x) \delta e_m(x) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta A(x)$ を次式で定義し、 $A(x)$ の完全微分 (exact derivative) としよう。

$$\begin{aligned} \delta A(x) &= A_{||}(x + dx \rightarrow x) - A(x) = dA^m(x) e_m(x) + A^m(x) \delta e_m(x) \\ &= dA^m(x) e_m(x) + dx^k \Gamma_{km}^n(x) A^m(x) e_n(x) \end{aligned} \quad (3.27)$$

この完全微分が自然基底の変動を表す式 3.9 と比較してやや複雑なのは、 $A(x)$ に自然基底の変動に加え、ベクトル場としての空間の変動が加わるからである。以後、場所の関数を示す (x) は省略して議論しよう。 δA の反変成分 δA^m は次のようになる。

$$\delta A^m = \delta A \cdot e^m = dA^m + dx^k \Gamma_{kn}^m A^n \quad (3.28)$$

第一項は位置変化による A の成分の形式的な変動分であるが、第二項でその中に含まれるベクトルの単純平行移動による変動分を相殺し、全体として実質的なベクトルの成分の変化を求めている。

ある特定方向 dx^k にだけ移動した際の δA^m を dx^k で除したものを ${}_k A^m (= \delta A^m / \partial x^k)$ と書き、ベクトルの反変成分の共変微分商 (covariant differential) と呼ぶ。

$${}_k A^m = \frac{\delta A^m}{dx^k} = \frac{\partial A^m}{\partial x^k} + \Gamma_{kn}^m A^n = \partial_k A^m + \Gamma_{kn}^m A^n \quad (3.29)$$

共変微分商を含む長い計算をするとき、 ${}_k A^m$ はしばしば A_k^m と記載される。本書では可能な限り、 ${}_k$ を使うこととし、コロンを使う場合には、それを明示することとする。

$\partial_k A^m$ は 2 階の混合テンソルのように見える。しかし、座標変換してみるとうまくいかない。

$$\begin{aligned}\partial_{\kappa'} A^{\mu'} &= \partial_{\kappa'} (\partial_m^{\mu'} A^m) = \partial_m^{\mu'} \partial_{\kappa'} A^m + \partial_{\kappa' m}^{\mu'} A^m \\ &= \partial_{\kappa'}^k \partial_m^{\mu'} \partial_k A^m + \partial_{\kappa'}^k \partial_{kn}^{\mu'} A^n \\ &= \partial_{\kappa'}^k \partial_m^{\mu'} \partial_k A^m + \partial_{\kappa'}^k (\partial_m^{\mu'} \Gamma_{kn}^m - \partial_k^{\nu'} \partial_n^{\nu'} \Gamma_{\nu'\nu'}^{\mu'}) A^n \\ &= \partial_{\kappa'}^k \partial_m^{\mu'} (\partial_k A^m + \Gamma_{kn}^m A^n) - \Gamma_{\kappa'\nu'}^{\mu'} A^{\nu'}\end{aligned}$$

第三行目の等号には式 3.19 の逆変換を利用した。第一行右辺の第一項だけならばテンソルの混合成分であるが、第二項があるためにうまくいかないのである。しかし、式変形後の第四行の最終項を左辺へ移動することにより、 $\partial_n A^m + \Gamma_{kn}^m A^k$ が混合テンソルとなることが直ちにわかって。それが式 3.29 に示した ${}_n A^m$ なのである。

考えてみれば ${}_n$ は不変量であり、その m 成分である δA^m は反変ベクトルとなり、さらにその位置ベクトルによる微分商が混合テンソルになることは容易に想像できる。以後に示す共変ベクトルの微分商やテンソルの微分商でも δA は共变的であり、このことから、この記号は共変微分 (covariant derivative) と呼ばれる。

なお、 $\operatorname{div} A$ はデカルト座標系では $\partial_m A^m$ であるので、曲線座標系では次式で定義できる。

$$\operatorname{div} A = {}_m A^m = \partial_m A^m + \Gamma_{mn}^m A^n \quad (3.30)$$

ベクトルの共変成分に対しても、反変成分と同様な作業を行うことができる。

$$\begin{aligned}\delta A &= A_{||}(x + dx \rightarrow x) - A(x) = \delta(A_m e^m) = dA_m e^m + A_m \delta e^m \\ &= dA_m e^m - dx^k \Gamma_{kn}^m A_m e^n\end{aligned}$$

δA の共変成分を δA_m と書いて、

$$\delta A_m = \delta A \cdot e_m = dA_m - dx^k \Gamma_{km}^n A_n \quad (3.31)$$

この結果、ベクトルの共変成分の共変微分商 ${}_k A_m$ は次式ようになる。

$${}_k A_m = \frac{\delta A_m}{dx^k} = \frac{\partial A_m}{\partial x^k} - \Gamma_{km}^n A_n = \partial_k A_m - \Gamma_{km}^n A_n \quad (3.32)$$

${}_k A_m$ については、反変成分の微分商のように $A_{m:k}$ と記載されることがある。

$\partial_k A_m$ の座標変換もうまくいかない。

$$\begin{aligned} \partial_{\kappa'} A_{\mu'} &= \partial_{\kappa'} (\partial_{\mu'}^m A_m) = \partial_{\mu'}^m \partial_{\kappa'} A_m + \partial_{\kappa'}^n \partial_{\mu'} A_n \\ &= \partial_{\mu'}^m \partial_{\kappa'}^k \partial_k A_m + (\partial_{\nu'}^n \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'} - \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^m \Gamma_{km}^n) A_n \\ &= \partial_{\kappa'}^k \partial_{\mu'}^m (\partial_k A_m - \Gamma_{km}^n A_n) + \Gamma_{\kappa'\mu'}^{\nu'} A_{\nu'} \end{aligned}$$

第二行の第一項だけならばテンソルの共変成分であるが、第二項があるためにうまくいかないのである。しかし、第三行を見ると、式 3.32 に示した ${}_n A_m$ ならば共変テンソルとして、うまく座標変換できることが明かである。

完全微分を dx^k で除したものを共変微分商と呼ぶならば、 e_m や e^m を dx^k で除したのも定義可能である。

$${}_k e_m = \frac{\delta e_m}{dx^k} = \Gamma_{km}^n e_n \quad (3.33)$$

$${}_k e^m = \frac{\delta e^m}{dx^k} = -\Gamma_{kn}^m e^n \quad (3.34)$$

3.5 テンソルの共変微分

任意のテンソルの共変微分や共変微分商はどうなるのであろうか。こうした考察を行う際、次の各定理を知っていると便利である。

テンソルの加法 同種のテンソルの和や差は同種のテンソルになる。

テンソルの乗法 テンソルとテンソルの積はテンソルになる。スカラーはその意味で、0 次のテンソルであり、座標変換に対して不変となる。

テンソルの縮約 センソルを縮約したものはテンソルである。

テンソルの商法則 二つの量の積がテンソルのとき、そのうちの一つがテンソルならば、もう一つもテンソルである。

これらの証明はテンソルの種類を仮定すれば、座標変換を使って比較的簡単にできるので各自に任せるが、参考に商法則のみ示しておこう。次のようにテンソルかどうかわからない二次の量 A_m^n と一次のテンソル B_k の積がテンソルだったとしよう。その座標変換した結果を $A_{\mu'}^{\nu'} B_{\kappa'}$ とすると、

$$(A_{\mu'}^{\nu'} B_{\kappa'}) = \partial_{\mu'}^m \partial_n^{\nu'} \partial_{\kappa'}^k (A_m^n B_k)$$

が成立する。一方、 $B_{\kappa'} = \partial_{\kappa'}^k B_k$ であるので、この式を左辺へ代入し、両辺から共通項を削除することにより、次式が得られる。

$$A_{\mu'}^{\nu'} = \partial_{\mu'}^m \partial_n^{\nu'} A_m^n$$

これより A_m^n がテンソルであることが証明された。

さて、まずスカラーの共変微分を求めてみよう。ベクトルの成分の共変微分が接続係数を含む複雑な変換を受けるのは、基底が変化するからである。スカラーは基底とは関係ない量であるので、共変微分も偏微分も何ら変らない。したがって次式が成立する。

$$\delta f = df \tag{3.35}$$

$${}_k f = \partial_k f \tag{3.36}$$

ベクトルの反変成分の共変微分に $+dx^k \Gamma_{kn}^m A^n$ が入り、一方ベクトルの共変成分の共変微分に $-dx^k \Gamma_{km}^n A_n$ が入ることから、反変でも共変でもないスカラーについてはこうなることが予測できよう。

任意のテンソルの共変微分を求める際、テンソルの積の共変微分に対し、積の偏微分のような部分微分の法則が成り立つことを利用する。例えば、

$$\begin{aligned}\delta(T_m^{nk} U_l^i) &= T_m^{nk}(\mathbf{x} + d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}) U_{||l}^i(\mathbf{x} + d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}) - T_m^{nk}(\mathbf{x}) U_l^i(\mathbf{x}) \\ &= (T_m^{nk}(\mathbf{x}) + \delta T_m^{nk}(d\mathbf{x})) (U_l^i(\mathbf{x}) + \delta U_l^i(\mathbf{x})) - T_m^{nk}(\mathbf{x}) U_l^i(\mathbf{x}) \\ &= \delta T_m^{nk} U_l^i(\mathbf{x}) + T_m^{nk} \delta U_l^i(\mathbf{x})\end{aligned}$$

それでは、例えば T_m^n の共変微分を求めてみよう。これに適切に反変やら共変ベクトル成分を掛けると $T_m^n u^m v_n$ のようなスカラー量を得ることができる。この共変微分を計算してみよう。

$$\begin{aligned}\delta(T_m^n u^m v_n) &= \delta T_m^n u^m v_n + T_m^n \delta u^m v_n + T_m^n u^m \delta v_n \\ &= \delta T_m^n u^m v_n + T_m^n (du^m + dx^a \Gamma_{ab}^m u^b) v_n + T_m^n u^m (dv_n - dx^a \Gamma_{an}^b v_b)\end{aligned}$$

一方、スカラー量の完全微分は式 3.35 より、全微分と等しいので、次式が成立する。

$$\delta(T_m^n u^m v_n) = d(T_m^n u^m v_n) = dT_m^n u^m v_n + T_m^n du^m v_n + T_m^n u^m dv_n$$

両式の最右辺を比較し、両辺から等しい項を削除し、さらに両辺を $u^m v_n$ で割ると、次式が得られる。

$$\delta T_m^n = dT_m^n - dx^k \Gamma_{km}^l T_l^n + dx^k \Gamma_{kl}^n T_m^l$$

これから、テンソルの共変サフィックスに対しては負号、反変サフィックスについては正号をつけた接続係数を並べればよいことがわかる。サフィックスはアインシュタイン規約を守るように、適宜配置すればよい。両辺を dx^k で割ることにより、共変微分商をさらに、もっと高次のテンソルの共変微分も同様に、接続係数を用いて記述できる。

$${}_k T_m^n = \partial_k T_m^n - \Gamma_{km}^l T_l^n + \Gamma_{kl}^n T_m^l \quad (3.37)$$

この規則を g_{mn} に摘要してみると、

$${}_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \Gamma_{km}^l g_{ln} - \Gamma_{kn}^l g_{ml} = 0 \quad (3.38)$$

この際、接続係数および計量テンソルの対称性と式 3.21 の関係を使った。

また、 $g_m^n = \delta_m^n$ は、

$${}_k g_m^n = \partial_k g_m^n - \Gamma_{km}^l g_l^n + \Gamma_{kl}^n g_m^l = 0 \quad (3.39)$$

この際、第一項は 0、第二項と第三項は同じ値で打ち消し合う。さらに、 g^{mn} は、

$${}_k g^{mn} = \partial_k g^{mn} + \Gamma_{kl}^m g^{ln} + \Gamma_{kl}^n g^{ml} = 0 \quad (3.40)$$

この際、式 3.21 に対応する次式を利用した (証明は略す)。

$$\begin{aligned} \partial_k g^{mn} &= \partial_k (e^m \cdot e^n) = e^m \cdot \partial_k e^n + e^n \cdot \partial_k e^m \\ &= -\Gamma_{kl}^n g^{ml} - \Gamma_{kl}^m g^{ln} \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.6 測地線

曲線座標系には測地線 (geodesic line) と呼ばれる概念がある。これはデカルト座標系における直線のようなもので、通常は、二点間を接続するいくつかの曲線のうちでもっとも短いものと定義される。より厳密には停留といって、ある曲線の付近で曲線を僅かに変形させたとき、その長さがほとんど変化しないとき、その曲線を測地線と言う。したがって、長さが最短、極小、最長、極大、さらには鞍部のような停留も存在する。例えば、球面の任意の二点を結ぶ曲線で、測地線は大円になることが知られているが、短い方の円弧は最短の測地線であるが、長い方の円弧はすぐ近傍に作成した小円の方が短いので、極小でもないし、さらにぐにゃくにゃと曲げればいくらでも長くなるので極大でもなく、鞍部のような意味での停留曲線である。

さて、 t を媒介変数として、曲線を $x^m(t)$ と表わそう。この曲線の長さは $\dot{x}^m = dx^m/dt$ として

$$I = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{mn}(\mathbf{x}) dx^m(t) dx^n(t)} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{g_{mn}(\mathbf{x}) \dot{x}^m \dot{x}^n}$$

この被積分関数を $L(x, \dot{x})$ とすると、

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{mn}(x) \dot{x}^m \dot{x}^n}$$

である。このようにある量 I が $x = (\{x^m\})$ や $\dot{x} = (\{\dot{x}^m\})$ を含む関数 L の積分で与えられる場合、これを停留化する条件は、次のオイラー方程式 (Euler equation) で与えられる (証明は他書を参考にされたい)。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

この式へ $L(x, \dot{x})$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{kn} \dot{x}^n}{L} \right) - \frac{\partial_k g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n}{2L} \\ = \frac{g_{kn} \ddot{x}^n}{L} + \frac{\partial_m g_{kn} \dot{x}^m \dot{x}^n}{L} - \frac{g_{kn} \dot{x}^n (dL/dt)}{L^2} - \frac{\partial_k g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n}{2L} = 0 \end{aligned}$$

最後の等号の両辺に L を掛け、さらに第二項を半分にして二項に書き換えると、

$$\begin{aligned} g_{kn} \ddot{x}^n + \frac{1}{2} (\partial_m g_{kn} \dot{x}^m \dot{x}^n + \partial_n g_{km} \dot{x}^m \dot{x}^n - \partial_k g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n) \\ = \frac{g_{kn} \dot{x}^n (dL/dt)}{L} \end{aligned}$$

ここで媒介変数 t として、曲線の始点からの距離 s を使うことにすると、 $L = ds/dt = 1$ 、 $dL/dt = 0$ となり、式が簡略化できる。さらに、 g^{kl} を掛けて式全体を昇階し、 $l \rightarrow k$ とすると、

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{mn}^k \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0 \quad (3.42)$$

が得られる。これが測地線 (geodesic line) の方程式である。なお、証明は省くが、相対性原理で現われる光線の式は $ds^2 = 0$ を満すが、その場合でも、 s を媒介変数として、光の測地線の式は上式で与えられる。

測地線は、ベクトルを方向を変えずにどんどん繋いでいって完成する線でもある。曲線座標系での直線は、 s を媒介変数として、 s の変化に対し $v^k = dx^k/ds$ が一定という条件で記述できる。

$$\frac{\delta v^k}{ds} = 0$$

この左辺を変形してみよう。

$$\frac{\delta v^k}{ds} = \frac{dv^k + \Gamma_{mn}^k v^m dx^n}{ds} = \frac{dv^k}{ds} + \Gamma_{mn}^k v^m v^n = 0$$

この式は前出の式 3.42 とまったく同じであり、接続係数を利用したベクトルの平行移動という概念が有効であることを示している。

[例 4.3] [二次元極座標系] 例 4.1 より、0 でない接続係数は $\Gamma_{\phi r}^{\phi} = 1/r$ 、 $\Gamma_{r\phi}^{\phi} = 1/r$ 、 $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r$ の三つである。これから次の測地線方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dv^r}{ds} - r v^{\phi} v^{\phi} &= 0 \\ \frac{dv^{\phi}}{ds} + \frac{2}{r} v^r v^{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

この後式を r^2 倍すると、下記のように書き直すことができる。

$$\frac{d(r^2 v^{\phi})}{ds} = 0$$

これから α を定数として、

$$v^{\phi} = \frac{\alpha}{r^2} \quad (3.44)$$

が得られる。

これを前式に代入し、両辺に $2v^r$ を掛けると

$$2v^r \frac{dv^r}{ds} = 2 \frac{\alpha^2}{r^3} v^r$$

$$\frac{d[(v^r)^2]}{ds} = -\alpha^2 \frac{d(r^{-2})}{ds}$$

これより

$$v^r = \frac{dr}{ds} = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}$$

v^r を求めるにはもっと簡単な方法が知られている。それは線素の式 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ を使うのである。この両辺を ds^2 で割ると、 $1 = (v^r)^2 + r^2 (v^\phi)^2$ が得られるので、式 3.44 を代入して直ちに、前式と同じ式が得られるだけでなく、積分定数も $\beta = 1$ と確定できる。

$$v^r = \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} \quad (3.45)$$

両辺を逆数にして積分すると、

$$r \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} = s - s_0$$

この式から逆に r を s の関数として得ることができる。

$$r = \sqrt{\alpha^2 + (s - s_0)^2} \quad (3.46)$$

さらに、この結果を式 3.44 に代入すると、

$$v^\phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s - s_0)^2}$$

両辺を積分すると、次の結果が得られる。

$$\tan(\phi - \phi_0) = \frac{1}{\alpha} (s - s_0) \quad (3.47)$$

式 3.46 と 3.47 より

$$r = \alpha \sec(\phi - \phi_0)$$

となり、任意の直線が測地線であることがわかる。

[例 4.4] [球面座標系] 例 4.2 より、0 でない接続係数は $\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cos\theta/\sin\theta$ 、 $\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cos\theta/\sin\theta$ 、 $\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta$ の三つである。これから次の測地線方程式が得られる。式 3.42 に上記 Γ_{mn}^k を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{dv^{\theta}}{ds} - \sin\theta \cos\theta (v^{\phi})^2 &= 0 \\ \frac{dv^{\phi}}{ds} + 2 \cot\theta v^{\theta} v^{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

この微分方程式を解けば、測地線が得られる。まず下の式を $\sin^2\theta$ 倍すると、下記のように書き直すことができる。

$$\frac{d(\sin^2\theta v^{\phi})}{ds} = 0$$

これから α を定数として、

$$v^{\phi} = \frac{\alpha}{\sin^2\theta} \quad (3.49)$$

が得られる。

これを前式に代入し、両辺に $2v^{\theta}$ を掛けることから v^{θ} を求めることもできるが、前問のように、線素の式を利用して解こう。 $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\phi^2$ であるので、 $1 = a^2(v^{\theta})^2 + a^2 \sin^2\theta (v^{\phi})^2$ が成立する。これに式 3.49 を代入すると、

$$v^{\theta} = \frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\alpha}{\sin\theta}\right)^2}$$

両辺を逆数にして積分すると、

$$a \cos^{-1} \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - a^2\alpha^2}} \right) = s - s_0$$

この式から逆に θ を s の関数として得ることができる。

$$\cos\theta = \sqrt{1 - a^2\alpha^2} \cos[(s - s_0)/a] \quad (3.50)$$

さらに、この結果を式 3.49 に代入すると、

$$v^\phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{1 - (1 - a^2\alpha^2) \cos^2[(s - s_0)/a]}$$

積分して両辺の \tan をとると、次の結果が得られる。

$$\tan(\phi - \phi_0) = \frac{\tan[(s - s_0)/a]}{a\alpha} \quad (3.51)$$

式 3.50 と 3.51 から (x, y, z) を求めると、測地線が任意の大円であることが示される。 XY 面に置かれた大円 $X = a \cos[(s - s_0)/a]$ 、 $Y = a \sin[(s - s_0)/a]$ を Y 軸を中心に $-\theta_0$ 傾けてみよう。

$$x = a \cos \theta_0 \cos[(s - s_0)/a]$$

$$y = a \sin[(s - s_0)/a]$$

$$z = a \sin \theta_0 \cos[(s - s_0)/a]$$

これらを球面座標系に変換すると、

$$\cos \theta = \frac{z}{a} = \sin \theta_0 \cos[(s - s_0)/a]$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos \theta_0} \tan[(s - s_0)/a]$$

さらに、 ϕ 方向に ϕ_0 回転してやると、上式の ϕ を $\phi - \phi_0$ に置き換えればよい。つまり、 $a\alpha = \cos \theta_0$ とすると、これらの式は、式 3.50 および 3.51 に一致するので、大円であることが証明できた。

第 4 章

曲率

球面座標系などを見てみると、地表はほぼ平面に見えることから、局所的には平行移動の概念は成立しても、大局的には成立していない。例えば地球の表面で、赤道上の東経 0° の位置で南極方向を向いた自然基底 e_θ を考える。これを球面内に拘束したまま、平行に北極まで移動すると、東経 0° に沿って南極の方を向いたベクトル e_θ となる。さらに、そのベクトルを平行に赤道上の東経 90° の位置まで移動すると、赤道に沿って西を向いたベクトル $-e_\phi$ となる。さらにそれを、平行に元の位置まで戻しても $-e_\phi$ のままで、元のベクトルと直交する。

つまり、リーマン幾何学では、大局的な平行の概念は存在しない。こうした現象は、ベクトル移動の際の dx^m の一次の微小量まで見ても説明できず、二次の微小量まで調べないと明かにできない。そこで、本章は二次微分の話である。

4.1 ベクトル場の二階共変微分商

ベクトル場の二階の共変微分商を、テンソルの共変微分商に注意して計算してみよう。

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_l A^n) &= \nabla_k (\partial_l A^n + \Gamma_{lm}^n A^m) \\ &= (\partial_{kl} A^n + (\partial_k \Gamma_{lm}^n) A^m + \Gamma_{lm}^n \partial_k A^m) \\ &\quad + \Gamma_{ki}^n (\partial_l A^i + \Gamma_{lm}^i A^m) - \Gamma_{kl}^i (\partial_i A^n + \Gamma_{im}^n A^m) \end{aligned}$$

と、あまり美しくない式が得られる。そこで、この共変微分記号の順番を入れ替えたものを求めよう。

$$\begin{aligned} \nabla_l (\nabla_k A^n) &= (\partial_{lk} A^n + (\partial_l \Gamma_{km}^n) A^m + \Gamma_{km}^n \partial_l A^m) \\ &\quad + \Gamma_{li}^n (\partial_k A^i + \Gamma_{km}^i A^m) - \Gamma_{lk}^i (\partial_i A^n + \Gamma_{im}^n A^m) \end{aligned}$$

これらの差をとると多くの項が相殺し、比較的美しい式が得られる。

$$[\nabla_k, \nabla_l] A^n = \nabla_k \nabla_l A^n - \nabla_l \nabla_k A^n = R_{m,kl}^n A^m \quad (4.1)$$

左辺の中括弧は交換子と呼ばれるもので、演算子を入れ替えて差をとることを示す。ただし、 $R_{m,kl}^n$ は次式で与えられる量である。 $R_{m,kl}^n$ のサフィックスのコンマは省いて記載されることも多いが、 k, l が一体となることが多いので本書では入れた。

$$\begin{aligned} R_{m,kl}^n &= \Lambda_{m,kl}^n - \Lambda_{m,lk}^n \\ &= (\partial_k \Gamma_{lm}^n + \Gamma_{ki}^n \Gamma_{lm}^i) - (\partial_l \Gamma_{km}^n + \Gamma_{li}^n \Gamma_{km}^i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、

$$\Lambda_{m,kl}^n = \partial_k \Gamma_{lm}^n + \Gamma_{ki}^n \Gamma_{lm}^i \quad (4.3)$$

であるが、 $\Lambda_{m,kl}^n$ は特に本書でのみ導入した非テンソル量である。

$R_{m,kl}^n$ はリーマン・クリストッフエル曲率テンソル (Riemann Christoffel curvature tensor)、略して曲率テンソル (curvature tensor) と呼

ばれる。何故テンソルであるかということ、式 4.1 の左辺の反変ベクトルの共変微分はテンソル、その共変微分もテンソル、それらの差もテンソルであり、さらに右辺で、テンソルの商法則より $R_{m,kl}^n$ はテンソルであるからである。共変微分記号の交換子は後に述べるように、微小ループに沿うベクトルの平行移動と深い関係にある。そこで、曲率テンソルの定義はこの程度にして、話を先に進めよう。

[例 5.1] [二次元極座標系] 二次元極座標系の接続係数を再掲しておこう。次の 3 項目を除いて残りは 0 である。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = 1/r\end{aligned}\quad (4.4)$$

曲率テンソル $R_{n,kl}^m$ は、 m と n が異なり、 k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned}R_{\phi,r\phi}^r &= -R_{\phi,\phi r}^r = \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{\phi r}^r = -1 \\ R_{r,r\phi}^\phi &= -R_{r,\phi r}^\phi = \partial_r \Gamma_{r\phi}^\phi - \partial_\phi \Gamma_{rr}^\phi = -1/r^2\end{aligned}\quad (4.5)$$

[例 5.2] [球面座標系] 球面座標系でも接続係数は次の 3 項目を除いて 0 である。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta\end{aligned}\quad (4.6)$$

曲率テンソル $R_{m,kl}^n$ は、 m と n が異なり、 k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned}R_{\phi,\theta\phi}^\theta &= -R_{\theta,\theta\phi}^\theta = \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta = 1 \\ R_{\theta,\phi\theta}^\phi &= -R_{\phi,\theta\phi}^\phi = \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \partial_\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi = \sin^2\theta\end{aligned}\quad (4.7)$$

4.2 基底のループに沿う移動

本章の最初に述べたように、基底を任意のループに沿って平行移動すると、その結果は元の基底とは異なる。ループとして二つの微小ベクトルで定義される小さな四辺形を選ぶと、一周した結果は元のベクトルと微小ベクトルの長さの二次の効果分ずれてくる。このため、すべての微小量を二次の項まで求めておこう。まず、移動の際には接続係数が現われるが、接続係数自身が移動の際の一次変化に関する微係数的なものなので、さらにその一次までの近似を求めておこう。 x 点の近傍の点を $x + dx = x + dx^k e_k$ としよう。

$$\Gamma_{ml}^n(x + dx^k e_k) = \Gamma_{ml}^n(x) + dx^k \partial_k \Gamma_{ml}^n(x) \quad (4.8)$$

これを利用して、僅かに離れた点の自然基底が二次近似でどのように表現されるか求めよう。まず接続係数を用いて、一次の微小量が得られる(式 3.9 の再掲)。

$$\delta e_m(x) = dx^k \Gamma_{km}^n(x) e_n(x) \quad (4.9)$$

したがって二次の微小量は次のようになる。計算にあたり、三次以上の項は無視している。

$$\begin{aligned} \delta^2 e_m(x) &= \delta e_m(x + dx^k x_k) - \delta e_m(x) \\ &= dx^l \Gamma_{lm}^n(x + dx^{k'} e_{k'}) e_n(x + dx^k e_k) - dx^l \Gamma_{lm}^n(x) e_n(x) \\ &= dx^l \left[\Gamma_{lm}^n(x) + dx^{k'} \partial_{k'} \Gamma_{lm}^n(x) \right] \left[e_n(x) + dx^k \Gamma_{kn}^{n'}(x) e_{n'}(x) \right] \\ &\quad - dx^l \Gamma_{lm}^n(x) e_n(x) \\ &= dx^k dx^l \partial_k \Gamma_{lm}^n(x) e_n(x) + dx^k dx^l \Gamma_{kn}^{n'}(x) \Gamma_{lm}^n(x) e_{n'}(x) \\ &= dx^k dx^l \Lambda_{m,kl}^n e_n(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで、式 4.3 で示した $\Lambda_{m,kl}^n$ を利用している。これよりテーラー展開を利用して、次式が得られる。

$$e_{||m}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + dx^k e_k) = [\delta_m^n + dx^k \Gamma_{km}^n(\mathbf{x}) + dx^k dx^l \Lambda_{m,kl}^n/2] e_n(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

次に、小さなほぼ平行四辺形 $OPQR$ を考え、自然基底 e_m を $O \rightarrow P \rightarrow Q$ と平行移動したものと、 $O \rightarrow R \rightarrow Q$ と平行移動したものと差を見てみよう。先に結論を言ってしまうと、この二つには、平行四辺形の面積に比例した差が発生するのである。 e_m を $O \rightarrow P \rightarrow Q$ の順に平行移動した基底を $e_{||m}(O, P)$ 、 $e_{||m}(O, P, Q)$ 、 $O \rightarrow R \rightarrow Q$ 平行移動した基底を $e_{||m}(O, R)$ 、 $e_{||m}(O, R, Q)$ と記載する。本当はすべての位置記号の間には $(O \rightarrow P)$ などのように、 \rightarrow を入れるべきであるが、式を縮めて記載するためにコンマとした。

平行四辺形の O 点の座標を \mathbf{x} 、 P 点を $\mathbf{x}_P = \mathbf{x} + da^l e_l(O)$ 、 Q 点が $\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_P + db^k e_k(P)$ 、 R 点が $\mathbf{x}_R = \mathbf{x} + da^k e_k(O)$ 、 Q 点が $\mathbf{x}_Q = \mathbf{x}_R + db^l e_l(R)$ にあるとしよう。 Q 点の定義が二種類あるが、これらはほとんど同じ値になる。また、 $\Lambda_{m,kl}^n$ などは、厳密には場所の関数であるが、その依存性は 4 次の微小量なので、空間依存性は無視する。

まず、 $e_{||m}(O, P)$ は

$$e_{||m}(O, P) = [\delta_m^n + da^k \Gamma_{km}^n(O) + da^k da^l \Lambda_{m,kl}^n/2] e_n(O) \quad (4.12)$$

$e_{||m}(O, P, Q)$ はこの結果を利用して、

$$\begin{aligned} e_{||m}(O, P, Q) &= [\delta_m^i + db^k \Gamma_{km}^i(P) + db^k db^l \Lambda_{m,kl}^i/2] e_{||i}(O, P) \\ &= [\delta_m^i + db^k \Gamma_{km}^i(O) + db^k da^l \partial_l \Gamma_{km}^i(O) + db^k db^l \Lambda_{m,kl}^i/2] \\ &\quad \left[\delta_i^n + da^{k'} \Gamma_{k'i}^n(O) + da^{k'} da^{l'} \Lambda_{i,k'l'}^n/2 \right] e_n(O) \\ &= [\delta_m^n + db^k \Gamma_{km}^n(O) + da^l \Gamma_{lm}^n(O) \\ &\quad + db^k db^l \Lambda_{m,kl}^n/2 + db^k da^l \Lambda_{m,lk}^n + da^k da^l \Lambda_{m,kl}^n/2] e_n(O) \end{aligned}$$

ここで式 4.3 を利用している。

同様に $e_{||m}(O, R, Q)$ は、上式の da と db を入れ替えればよいから、

$$e_{||m}(O, R, Q) = [\delta_m^n + da^k \Gamma_{km}^n(O) + db^l \Gamma_{lm}^n(O) \\ + da^k da^l \Lambda_{m,kl}^n/2 + da^k db^l \Lambda_{m,lk}^n + db^k db^l \Lambda_{m,kl}^n/2] e_n(O)$$

最後に、この二つの経路の差は

$$e_{||m}(O, P, Q) - e_{||m}(O, R, Q) = da^k db^l (\Lambda_{m,kl}^n - \Lambda_{m,lk}^n) e_n(O) \\ = da^k db^l R_{m,kl}^n e_n(O)$$

経路差の計算結果は、このループを $O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$ と一周回ったときの差とも一致する。これを単に (O, O) と書こう。

$$e_{||m}(O, O) = da^k db^l R_{m,kl}^n e_n(O) \quad (4.13)$$

双対基底についても、同様な計算を行うことで、ループに沿う平行移動の結果を計算することができる。

$$e_{||}^m(O, O) = da^k db^l R_{n,kl}^m e^n(O) \quad (4.14)$$

4.3 ベクトルのループに沿う移動

一般のベクトル A に対し、 $A = A_{||}^m(O, O) e_{||m}(O, O) = A^m(O) e_m(O)$ なので、

$$A = A_{||}^m(O, O) e_{||m}(O, O) = A_{||}^m(O, O) (e_m(O) - da^k db^l R_{m,kl}^n e_n(O)) \\ = A_{||}^m(O, O) e_m(O) - da^k db^l R_{m,kl}^n A_{||}^m(O, O) e_n(O) \\ (= A^m(O) e_m(O))$$

これより、括弧内の等号の両辺に共役の単位ベクトルを掛けると次式が得られる。

$$A_{||}^m(O, O) = A^m(O) + da^k db^l R_{n,kl}^m A^n(O) \quad (4.15)$$

ただし、 $A_{||}^n(O, O)$ を四次の微小量を無視して $A^n(O)$ に置き換えている。つまり、上付きサフィックスを有する反変ベクトルと双対基底は共に正の補正を受ける。

同様な手法により、

$$A_{||m}(O, O) = A_m(O) - da^k db^l R_{m,kl}^n A_n(O) \quad (4.16)$$

が得られる。つまり、下付きサフィックスを有する共変ベクトルと自然基底は共に負の補正を受ける。

ここで、ループに沿った微小移動が二階の共変微分商の交換子に繋がることを示そう。式 4.15 の左辺は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} A_{||}^m(O, O) - A^m(O) &= [A_{||}^m(O, O) - A_{||}^m(O, R)] + [A_{||}^m(O, R) - A_{||}^m(O, Q)] \\ &\quad + [A_{||}^m(O, Q) - A_{||}^m(O, P)] + [A_{||}^m(O, P) - A^m(O)] \\ &= \delta A^m(O, R) + \delta A^m(R, Q) + \delta A^m(Q, P) + \delta A^m(P, O) \\ &= - {}_l A^m(R) db^l - {}_k A^m(Q) da^k + {}_l A^m(P) db^l + {}_k A^m(O) da^k \\ &= {}_k {}_l A^m da^k db^l - {}_l {}_k A^m da^k db^l \\ &= [{}_{k, l}] A^m da^k db^l \end{aligned}$$

したがって、式 4.1 と同じ式が得られる。

$$[{}_{k, l}] A^m = R_{n,kl}^m A^n \quad (4.17)$$

したがって、小さなループにおける平行移動が、二階共変微分商の交換子と対応がとれていることが納得できよう。

同様に、共変成分の二階共変微分商の交換子についても次式が得られる。

$$[{}_{k, l}] A_m = -R_{m,kl}^n A_n \quad (4.18)$$

これらのように、偏微分商は交換可能であるのに対し、共変微分商は一般に交換不能である。

証明は省略するが、任意のテンソルに対する二階共変微分商の交換子についても、上付きサフィックスには正号が、下付きサフィックスについては負

号がついた曲率テンソルが対応する。例えば、

$$[\quad k, \quad l] A_m^n = R_{i,kl}^n A_m^i - R_{m,kl}^i A_i^n$$

これをリッチの公式 (Ricci formula) と呼ぶ。

4.4 曲率テンソルの対称性

曲率を降階して得られる

$$R_{mn,kl} = g_{mi} R_{n,kl}^i \quad (4.19)$$

も曲率テンソルと呼ばれる。

曲率にはいくつかの対称性がある。

1. 後半のサフィックスの入替に関する反対称性 (antisymmetry)。

$$\begin{aligned} R_{n,kl}^m &= -R_{n,lk}^m \\ R_{mn,kl} &= -R_{mn,lk} \quad (\text{上式を降階したもの}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

2. 前半のサフィックスの入替に関する反対称性 (antisymmetry)。

$$R_{mn,kl} = -R_{nm,kl} \quad (4.21)$$

3. 前半と後半のサフィックスの入替に関する交換対称性 (commutation)。

$$R_{mn,kl} = R_{kl,mn} \quad (4.22)$$

これらの証明は囲みに示す。

式 4.20 の証明: 曲率テンソルの定義式 4.2 が交換子で定義されているため、その一般的性質である。

式 4.21 の証明: リッチの公式を使って、計量テンソルの二階微分の交換子を計算してみよう。

$$\begin{aligned} [k, l] g_{mn} &= -R_{m,kl}^i g_{in} - R_{n,kl}^i g_{mi} \\ &= -R_{nm,kl} - R_{mn,kl} \end{aligned}$$

計量テンソルの共変微分は 0 であるから、左辺は 0 なので、証明終了。

式 4.22 の証明: 曲率テンソルの定義式 4.2 の n, k, l を循環入替しただけの式を加え合せると、接続係数の対称性を使って第一ビアンキ恒等式 (Bianchi equation) と呼ばれる次式が得られる。

$$R_{m,kl}^n + R_{k,lm}^n + R_{l,mk}^n = 0 \quad (4.23)$$

さらにこれを降階すると、

$$R_{nm,kl} + R_{nk,lm} + R_{nl,mk} = 0$$

式 4.22 は、これに式 4.20 と式 4.21 を適用して得られる等価な式である。上式のすべての項で n と m を入れ替える。

$$R_{mn,kl} + R_{mk,ln} + R_{ml,nk} = 0$$

これら二式を加えると、前半サフィックスの反対称性より第一項が消滅する。

$$R_{nk,lm} + R_{nl,mk} + R_{mk,ln} + R_{ml,nk} = 0$$

すべての項の前半サフィックス入替を行うと、

$$-R_{kn,lm} - R_{ln,mk} - R_{km,ln} - R_{lm,nk} = 0$$

この両側を循環する式で置き換えると、

$$R_{kl,mn} + R_{km,nl} - R_{ln,mk} - R_{km,ln} + R_{ln,km} + R_{lk,mn} = 0$$

第4項および第5項の後半サフィックス入替を行い、第一項と最終項を前半サフィックス反対称性を利用して消去し、全体を2で割ると、

$$R_{km,ln} - R_{ln,mk} = 0$$

が得られ、証明が終了する。

4.5 リッチテンソル、スカラー曲率とアインシュタインテンソル

以上で、いわゆるリーマン幾何学の説明は終りであるが、最後に一般相対性理論でしばしば用いられるいくつかの概念を導入しよう。

まず、曲率テンソルを次のように縮約したテンソルをリッチテンソル (Ricci tensor) と呼ぶ。

$$R_{mk} = R_{m,kl}^l \quad (4.24)$$

さらに、これを縮約したものをスカラー曲率 (scalar curvature) と呼ぶ。

$$R = g^{mk} R_{mk} = g^{mk} R_{m,kl}^l \quad (4.25)$$

続いてアインシュタインテンソル (Einstein tensor) G^{ik} を導入しよう。これは次式によって定義される。

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \quad (4.26)$$

式からわかるように、昇階されたリッチテンソルから計量テンソルの比例項を引いただけなので、一種の曲率テンソルである。しかし、曲率テンソルと異なりアインシュタインテンソルの共変微分は0となる。

$${}_i G^{ij} = 0 \quad (4.27)$$

この性質を利用して、一般相対性理論に利用される。これらの式の導出に興味のある人は、囲みを見てほしい。

まず、曲率テンソルの微分商に対し、次式で表わされる第二ビアンキ恒等式、あるいは単にビアンキ恒等式 (Biannki equation) と呼ばれる対称性が成立する。

$${}_i R_{m,kl}^n + {}_k R_{m,li}^n + {}_l R_{m,ik}^n = 0 \quad (4.28)$$

あるいは、同じ式であるが、次式の表現の方が見易いかも知れない。

$$R_{m,kl;i}^n + R_{m,li;k}^n + R_{m,ik;l}^n = 0 \quad (4.29)$$

この式の証明は以下のものである。

$[{}_i, [{}_k, {}_l]] A_m$ を計算してみよう。まず、交換子を曲率テンソルに変換せず、そのまま共変微分の形のままで計算してみよう。

$$\begin{aligned} [{}_i, [{}_k, {}_l]] A_m &= {}_i [{}_k, {}_l] A_m - [{}_k, {}_l] {}_i A_m \\ &= {}_i {}_k {}_l A_m - {}_i {}_l {}_k A_m - {}_k {}_l {}_i A_m + {}_l {}_k {}_i A_m \end{aligned}$$

ここで、 i, k, l を循環して三つの式を加えると、その結果は 0 となることがわかる。

次に $[{}_i, [{}_k, {}_l]] A_m$ を、交換子を積極的に曲率テンソルへ直しながら変形する。

$$\begin{aligned} [{}_i, [{}_k, {}_l]] A_m &= {}_i [{}_k, {}_l] A_m - [{}_k, {}_l] {}_i A_m \\ &= -{}_i (R_{m,kl}^n A_n) - R_{m,kl}^n {}_i A_n - R_{i,kl}^n {}_n A_m \\ &= -({}_i R_{m,kl}^n) A_n - R_{i,kl}^n {}_n A_m \end{aligned}$$

ここで、最初の等号の後の第二項の変形は、 ${}_i A_m$ を二階のテンソルとして、リッチの公式を適用する。この式の i, k, l を循環して三つの式を加えた結果は、前半で示したように 0 となるから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &({}_i R_{m,kl}^n + {}_k R_{m,li}^n + {}_l R_{m,ik}^n) A_n \\ &+ (R_{i,kl}^n + R_{k,li}^n + R_{l,ik}^n) {}_n A_m = 0 \end{aligned}$$

第二項は式 4.23 を利用して 0 となるから、ベクトル A_n の任意性を利用して、証明が完了する。

続いてアインシュタインテンソルを導出しよう。ビアンキ恒等式に g_n^l を掛ける。計量テンソルの共変微分は 0 であるので、これを共変微分の内部に入れても構わない。

$${}_i(g_n^l R_{m,kl}^n) + {}_k(g_n^l R_{m,li}^n) + {}_l(g_n^l R_{m,ik}^n) = 0$$

このうち、第一項と二項は縮約になっていて、リッチテンソルに置き換える。また第三項は単純なサフィックスの置き換えになる。

$${}_i R_{mk} - {}_k R_{mi} + {}_l R_{m,ik}^l = 0$$

さらに $g^{mi} g^{kj}$ を掛けて昇階してみよう。

$${}_i R^{ij} - {}_k g^{kj} R + {}_l R^{lj} = 0$$

第二項にはスカラー曲率が現われる。第二項は $k \rightarrow i$ 、第三項は $l \rightarrow i$ と置き換え、すべてを ${}_i$ に統一すると、次の関係式が得られ、証明が終了する。

$${}_i \left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) = {}_i G^{ij} = 0$$

[例 5.3] [二次元極座標系] 曲率テンソル $R_{n,kl}^m$ は、 m と n が異なり、 k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned} R_{\phi,r\phi}^r &= -R_{\phi,\phi r}^r = \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r - \partial_{\phi} \Gamma_{\phi r}^r = -1 \\ R_{r,r\phi}^{\phi} &= -R_{r,\phi r}^{\phi} = \partial_r \Gamma_{r\phi}^{\phi} - \partial_{\phi} \Gamma_{rr}^{\phi} = -1/r^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

したがって、リッチテンソルは

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R_{r,rr}^r + R_{r,\phi r}^{\phi} = 1/r^2 \\ R_{r\phi} &= R_{\phi r} = 0 \\ R_{\phi\phi} &= R_{\phi,r\phi}^r + R_{\phi,\phi\phi}^{\phi} = -1 \end{aligned}$$

より、

$$(\{R_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

これを昇階すると

$$(\{R_m^n\}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & -1/r^2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

さらに昇階すると、

$$(\{R^{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & -1/r^4 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

スカラー曲率は

$$R = R_r^r + R_\phi^\phi = 0 \quad (4.34)$$

つまり、実は曲っていない空間であることがわかる。

スカラー曲率が0であるので、アインシュタインテンソルはリッチテンソルと一致し、

$$(\{G^{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & -1/r^4 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

[例 5.4] [球面座標系] 曲率テンソル $R_{m,kl}^n$ は、 m と n が異なり、 k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned} R_{\phi,\theta\phi}^\theta &= -R_{\theta,\phi\phi}^\phi = \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 \\ R_{\theta,\phi\theta}^\phi &= -R_{\phi,\theta\theta}^\theta = \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi - \partial_\phi \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.36)$$

したがって、リッチテンソルは

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R_{\theta,\theta\theta}^\theta + R_{\theta,\phi\theta}^\phi = \sin^2 \theta \\ R_{\theta\phi} &= R_{\phi\theta} = 0 \\ R_{\phi\phi} &= R_{\phi,\theta\phi}^\theta + R_{\phi,\phi\phi}^\phi = 1 \end{aligned}$$

より、

$$(\{R_{mn}\}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

これを昇階すると

$$(\{R_m^n\}) = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

さらに昇階すると、

$$(\{R^{mn}\}) = \frac{1}{a^4} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1/\sin^4 \theta \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

スカラー曲率は

$$R = R_\theta^\theta + R_\phi^\phi = [\sin^2 \theta + (1/\sin^2 \theta)]/a^2 \quad (4.40)$$

つまり、実際に曲っている空間であることがわかる。

アインシュタインテンソルは、

$$(\{G^{mn}\}) = \frac{1 - (1/\sin^4 \theta)}{2a^4} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

第 5 章

空間微分演算子

電磁気学でよく出現する grad、div、rot といった空間微分演算子は曲線座標系でどのような形になるのであろうか。これらの算出方法を示す。

5.1 接続係数の計算

まず接続係数に関する二つの公式を示しておこう。接続係数を直接算定するのは、項目が多く、結構面倒であるが、 g を g_{mn} を要素とする行列式として、

$$dg = dg_{mn} g^{mn} g \quad (5.1)$$

の関係があることを利用して誘導される次の二式を使うと計算が簡単になることが多い。

$$\Gamma_{mn}^k g^{mn} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_l (\sqrt{g} g^{lk}) \quad (5.2)$$

$$\Gamma_{mn}^m = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m \sqrt{g} \quad (5.3)$$

なお、 g が負となる場合は、 \sqrt{g} の代わりに $\sqrt{-g}$ を用いる。

式 5.1 の証明から始めよう。また、三次元空間での証明を行うが、これと同じ方法で、もっと多次元空間の証明ができることを認識してほしい。

$$\begin{aligned}
 dg &= d \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} dg_{11} & g_{12} & g_{13} \\ dg_{21} & g_{22} & g_{23} \\ dg_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & dg_{12} & g_{13} \\ g_{21} & dg_{22} & g_{23} \\ g_{31} & dg_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & dg_{13} \\ g_{21} & g_{22} & dg_{23} \\ g_{31} & g_{32} & dg_{33} \end{vmatrix} \\
 &= dg_{11} \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - dg_{21} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \dots \\
 &= (dg_{11} g^{11} + dg_{21} g^{21} + dg_{31} g^{31}) g + \dots + \dots \\
 &= dg_{mn} g^{mn} g
 \end{aligned}$$

となり、与式が得られる。ここで、下から二番目の等号であるが、

$$\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g_{12} & g_{13} \\ g^{11} & g_{22} & g_{23} \\ g^{11} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g^{11} g$$

などの式を利用して変形した。

式 5.2 の証明は以下のものである。

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{mn}^k g^{mn} &= \frac{1}{2} (g^{mn} g^{kl} \partial_m g_{ln} + g^{mn} g^{kl} \partial_n g_{ml} - g^{mn} g^{kl} \partial_l g_{mn}) \\
 &= g^{mn} g^{kl} \partial_m g_{ln} - \frac{1}{2} g^{mn} g^{kl} \partial_l g_{mn} \\
 &= -\partial_l g^{lk} - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial_l g}{g} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_l (\sqrt{g} g^{lk})
 \end{aligned}$$

このうち二番目の等号は、その前の式の第二項で m, n を入れ替えて、第一項と同じ形として 2 倍している。また三番目の等号後の前項は

$g^{mn} \partial_n (g^{kl} g_{ln}) = g^{mn} \partial_n \delta_n^k = 0$ の左辺を部分微分することにより得られる $\partial_n g^{km} + g^{mn} g^{kl} \partial_n g_{ln} = 0$ を利用して変更した。また後項は式 5.1 を利用した。

同様に式 5.3 の証明は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn}^m &= \frac{1}{2} g^{ml} (\partial_m g_{ln} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn}) = \frac{1}{2} g^{ml} \partial_n g_{ml} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial_m g}{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_n \sqrt{g} \end{aligned}$$

このうち二番目の等号は、その前の式の第三項で m, n を入れ替えて、第一項と同じ形として相殺している。三番目の等号は式 5.1 を利用した。

5.2 空間微分演算子

まず grad であるが、デカルト座標系では以下のように定義されている。ただし、本節ではデカルト座標系と曲線座標系の次元数は等しいとする。

$$\text{grad } f = \partial_M f e^M = \partial_M f g^{MN} e_N \quad (5.4)$$

これを座標変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \partial_M f g^{MN} e_N &= (\partial_M x^m \partial_m f) (\partial_m x^M g^{mn} \partial_n x^N) (e_n \partial_N x^n) \\ &= \partial_m f g^{mn} e_n \quad (5.5) \end{aligned}$$

と、曲線座標系においてもデカルト座標系と同じような形に変換されるので、これでよいことがわかる。

$$\text{grad } f = \partial_m f g^{mn} e_n \quad (5.6)$$

あるいは

$$(\text{grad } f)^n = \partial_m f g^{mn} \quad (5.7)$$

$\operatorname{div} \mathbf{A}$ はデカルト座標系において $\partial_M A^M$ であるが、これを変換すると、本節で述べたように同じような形とはならない。結局、 ${}_M A^M$ を変換するのがよい。ただし、この式は、デカルト座標系では $\partial_M A^M$ と同じ値をとる。曲線座標系では次のように、接続係数を必要とする。これを式 5.3 を使って書き直す。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= {}_m A^m = \partial_m A^m + \Gamma_{mk}^m A^k \\ &= \partial_m A^m + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_k \sqrt{g}) A^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} A^m) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$\operatorname{rot} \mathbf{A}$ はデカルト座標系において、次のように定義されている。

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \epsilon^{MNK} \partial_M A_N e_K \quad (5.9)$$

ここで、 ϵ^{MNK} は完全反対称テンソルである。つまり、 N, M, K が $1, 2, 3$ の偶置換である場合に 1 、奇置換である場合に -1 、それ以外は 0 という量である。まず、この変換則を調べておこう。例えば、 ϵ^{mnk} を変換してみよう。なお、行列式中のサフィックス $1, 2, 3$ は m, n, k のとる値である。

$$\partial_m x^M \partial_n x^N \partial_k x^K \epsilon^{mnk} = \begin{vmatrix} \partial_1 x^M & \partial_1 x^N & \partial_1 x^K \\ \partial_2 x^M & \partial_2 x^N & \partial_2 x^K \\ \partial_3 x^M & \partial_3 x^N & \partial_3 x^K \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

(N, M, K) が $(1, 2, 3)$ の偶置換の場合、右辺は $\partial_m x^M$ の作る行列式 $J = |\{\partial_m x^M\}|$ になる。奇置換の場合、右辺は $-J$ になり、それ以外の場合、右辺は 0 となる。つまり ϵ^{MNL} の J 倍になる。

$$\partial_m x^M \partial_n x^N \partial_k x^K \epsilon^{mnk} = J \epsilon^{MNL} \quad (5.11)$$

これから ϵ^{mnk}/J がテンソルとなることがわかる。 $\partial_M A^N$ の変換も共変微分に変更する必要があり、接続係数を必要とする。この結果、次の式が得ら

れる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \quad {}_m A_n \mathbf{e}_k = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} (\partial_m A_n - \Gamma_{mn}^l A_l) \mathbf{e}_k \quad (5.12)$$

しかし、この式で $\epsilon^{mnk} \Gamma_{mn}^l$ は m, n が ϵ^{mnk} に対し反対称なのと Γ_{mn}^l に対し対称であることから、自己消去する。そこで、次式が得られる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \partial_m A_n \mathbf{e}_k \quad (5.13)$$

あるいは、

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^k = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \partial_m A_n \quad (5.14)$$

最後にラプラシアンを扱おう。証明は略すが、 Δf が不変量となるためには、共変微分を使った次式のような形でなければならない。

$$\Delta f = g^{mn} \quad {}_m \quad {}_n f = g^{mn} \partial_{mn} f + \Gamma_{mn}^k g^{mn} \partial_k f \quad (5.15)$$

これから、式変形をしていくことも可能であるが、 $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ を利用し、 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ の変換式に $\mathbf{A} = \operatorname{grad} f$ の変換式を代入する方が簡単である。

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} g^{mn} \partial_n f) \quad (5.16)$$

5.3 直交曲線座標系における空間微分演算子

5.3.1 スケール因子

一般に基底の長さは 1 とは限らないが、長さ 1 の単位ベクトル (unit vector) の方がわかりやすい。そこで、基底 \mathbf{e}_m と同じ方向を持つ単位ベクトル \mathbf{u}_m を考える。

$$\mathbf{e}_m = h_m \mathbf{u}_m \quad (5.17)$$

ここで、 h_m は基底の長さであり、スケール因子 (scale factor) と呼ばれる。また、本節ではアインシュタイン規約は用いないものとする。これより、線素ベクトルは次のようになる。

$$ds = \sum_m dx^m e_m = \sum_m dx^m h_m \mathbf{u}_m \quad (5.18)$$

多くの実用的な曲線座標系では、自然基底が互いに直交しており、直交曲線座標系 (orthogonal curvilinear coordinate system) となっている。このような場合には

$$\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_n = \delta_{mn} \quad (5.19)$$

が成立するので、線素は次式のようになる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{mn} dx^m dx^n e_m \cdot e_n = \sum_{mn} dx^m dx^n h_m h_n \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_n \\ &= \sum_{mn} dx^m dx^n h_m h_n \delta_{mn} \end{aligned} \quad (5.20)$$

したがって計量テンソルは次式で与えられる。

$$g_{mn} = h_m^2 \delta_{mn} \quad (5.21)$$

また逆に、逆に次式が成立する。

$$h_m = \sqrt{g_{mm}} \quad (5.22)$$

双対基底 e^m は e_m と同じ方向を持つ。 $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}_m$ としてみよう。直交曲線座標系では、この結果、 \mathbf{u}^m も互いに直交する長さ 1 の正規直交基底となる。つまり、 \mathbf{u}^m は自己双対である。ここで、双対基底を $e^m = (1/h_m) \mathbf{u}^m$ としてみよう。すると、

$$g^{mm} = e^m \cdot e^m = \frac{1}{h_m} \mathbf{u}^m \cdot \frac{1}{h_m} \mathbf{u}^m = \frac{1}{h_m^2} \delta^{mm} \quad (5.23)$$

となり、確かに双対座標系の条件を満足している。これらの結果、 e_m 、 \mathbf{u}_m 、 \mathbf{u}^m 、 e^m はすべて同じ方向で、長さが h_m 、1、1、 $1/h_m$ のベクトルである。

同様に、ベクトルの成分 A^m 、 A_u^m 、 A_m^u 、 A_m は、長さが $1/h_m$ 、 1 、 1 、 h_m の比になる。ただし、 A_u^m 、 A_m^u は \mathbf{u}_m 、 \mathbf{u}^m を基底としたときのベクトルの長さである。 e^m を用いると線素ベクトルは次のようになる。

$$ds = \sum_m dx_m e^m = \sum_m dx_m \frac{1}{h_m} \mathbf{u}^m \quad (5.24)$$

さらに、前式の二乗長を求めると、線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = \sum_m g^{mm} (dx_m)^2 = \sum_m \left(\frac{dx_m}{h_m} \right)^2 \quad (5.25)$$

なお、多くの曲線座標系の変換の議論はデカルト座標を基礎とするが、デカルト座標では $g_{MN} = \delta_{MN}$ であるので、以下の式で計算することができる。

$$g_{mn} = \sum_M \partial_m x^M \partial_n x^M \quad (g_{MN} = \delta_{MN} \text{の場合}) \quad (5.26)$$

また、 $J = |\{\partial_m x^M\}|$ であるから、

$|\{g_{mn}\}| = |\{\partial_m x^M\}| |\{\partial_n x^M\}| = J^2$ となる。さらに直交曲線座標系では g_{mn} は非対角要素を有しないため、次式が成立する。

$$J = \sqrt{|\{g_{mm}\}|} = \sqrt{\prod_m g_{mm}} = \prod_m h_m \quad (\text{直交曲線座標系の場合}) \quad (5.27)$$

一般の曲線座標系での grad、div、rot といった微分演算がどのような形になるかは前節で詳しく述べたが、実用的には、直交曲線座標系での形がしばしば必要となることが多い。

こうした計算でもっとも面倒なのは、目標座標系におけるベクトルの成分と言った場合、今迄は e_m を基底とした A^m を指したが、本節で成分と言った場合は、 e_m 方向の実の長さを示していることである。つまり、 \mathbf{u}_m を基底とした成分である。これを、今迄の共変成分 A^m に対して、 A_u^m を物理成

分 (physical component) という。式で表現すると、次式のようになる。

$$\mathbf{A} = A^m \mathbf{e}_m = A_u^m \mathbf{u}_m \quad (5.28)$$

$\mathbf{e}_m = h_m \mathbf{u}_m$ であるので、成分に対しては、次式が成立する。

$$A^m = A_u^m / h_m \quad (5.29)$$

同様に $\mathbf{e}^m = \mathbf{u}^m / h_m$ であるので、成分に対しては、次式が成立する。

$$A_m = A_m^u h_m \quad (5.30)$$

なお、以下にもこのように h_m が入ってくる式が現われるが、これらはすべてアインシュタイン規約ではないので注意して欲しい。 h_m が入って、さらに総和記号が必要なところは、その都度、総和記号を記載することとする。

[例 6.1] 特殊相対性理論の際の座標変換であるが、 $x = 0$ と $x' = -Vt'$ が対応することから、 $\beta = V/c$ として、

$$\begin{aligned} x &= x' + \beta ct' \\ ct &= ct' + Dx' \end{aligned}$$

という形からスタートできないだろうか。線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 - d(ct)^2 = dx'^2 + 2\beta dx' d(ct') + \beta^2 d(ct')^2 \\ &\quad - d(ct')^2 - 2D dx' d(ct') - D^2 dx'^2 \end{aligned}$$

となる。まず、これが直交曲線座標系となるように $D = \beta$ とすると、

$$ds^2 = (1 - \beta^2) dx'^2 - (1 - \beta^2) d(ct')^2$$

つまり、 (x', ct') 系の計量テンソルを、

$$\{\{g_{\mu\nu}'\}\} = \begin{pmatrix} 1 - \beta^2 & 0 \\ 0 & -(1 - \beta^2) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

としたことになる。そこで、 $h_{x'} = h_{ct'} = \sqrt{1 - \beta^2}$ とすれば、自然基底は正規化される（ミンコウスキー空間であるため、厳密には、 ct 成分の二乗長は負のまま）。 $x^{\mu'} = x_u^{\mu'} / h_{\mu'} = \gamma x_u^{\mu'}$ とすると、 $(x_u^{\mu'}) = (x'_u, ct'_u)$ は、通常の特相対性理論で使われる (x', ct') となる。

5.3.2 勾配

$\text{grad } f$ を計算するには、前節に示した $\text{grad } f = \partial_m f g^{mn} e_n \wedge e_m = h_m \mathbf{u}_m$ を代入する。

$$\text{grad } f = \sum_n \partial_m f g^{mn} h_n \mathbf{u}_n = \sum_m \partial_m f \frac{1}{h_m} \mathbf{u}_m \quad (5.32)$$

この結果、次式が得られる。

$$(\text{grad } f)^m = \frac{\partial f}{\partial x^m} \frac{1}{h_m} \quad (5.33)$$

5.3.3 発散

発散については、前節の $\text{div } \mathbf{A} = \sum_m \partial_m (\sqrt{g} A^m) / \sqrt{g}$ を利用する。

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \sum_m \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m \left(\sqrt{g} \frac{A_u^m}{h_m} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 A_u^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_u^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_u^3)}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.3.4 回転

回転についても、前節の定義を利用する。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \partial_m A_n e_k \quad (5.35)$$

ここで、右辺各項を書き直すと次式が得られる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{mnk} \epsilon^{mnk} \frac{\partial (h_n A_n^u)}{\partial x^m} h_k \mathbf{u}_k \quad (5.36)$$

$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^k$ を求めるには、右辺から \mathbf{u}_k を外せばよい。また、 $A_n^u = A_n^u$ であるので、 \mathbf{A} の n 方向の成分の実の長さである。

5.3.5 ラプラシアン

最後にラプラシアンであるが、前節の

${}^2 f = \partial_m (\sqrt{g} g^{mn} \partial_n f) / \sqrt{g}$ を利用する。

$${}^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_m (h_1 h_2 h_3 g^{mn} \partial_n f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right] \quad (5.37)$$

以下、代表的な直交曲線座標系に対し、今迄調べたことを示していこう。

[例 6.2] [二次元極座標系] 計量係数は

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

であるので、

$$g = r^2$$

$$J = \sqrt{g} = r$$

$$(\{h_m\}) = (1 \quad r)$$

これらの結果を利用して、各種微分演算を求めることができる。

$$\text{grad } f = \partial_r f \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\phi f \mathbf{u}_\phi \quad (5.39)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (5.40)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{\partial(r A_r)}{\partial \phi} \right) \quad (5.41)$$

$${}^2 f = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \quad (5.42)$$

二次元空間なので、 $\text{rot } \mathbf{A}$ の計算では、 $h_3 = 1$ 、 $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\phi$ とした。

[例 6.3] [球面座標系] $(\{m\}) = (\theta, \phi)$ として、

$$(\{g_{mn}\}) = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

これより、

$$g = a^4 \sin^2 \theta$$

$$J = \sqrt{g} = a^2 \sin \theta$$

$$(\{h_m\}) = (a \quad a \sin \theta)$$

これらの結果を利用して、各種微分演算を求めることができる。

$$\text{grad } f = \frac{1}{a} \left(\partial_\theta f \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi f \mathbf{u}_\phi \right) \quad (5.44)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (5.45)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \quad (5.46)$$

$${}^2 f = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \quad (5.47)$$

二次元空間なので、 $\text{rot } \mathbf{A}$ の計算では、 $h_3 = 1$ 、 $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\phi$ とした。

[例 6.4] [三次元極座標系] 三次元の極座標系の順変換に関する諸量は以下のようである。

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$(\{\partial_m x^M\}) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

$$g = r^4 \sin^2 \theta$$

$$J = \sqrt{g} = r^2 \sin \theta$$

$$(\{h_m\}) = (1 \quad r \quad r \sin \theta)$$

各種微分演算は次のようになる。

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 \sin \theta A_u^r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta A_u^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_u^\phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_u^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial(r \sin \theta A_u^\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_u^\theta)}{\partial \phi} \right) \mathbf{u}_r \right. \\ &\quad \left. + r \left(\frac{\partial A_u^r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta A_u^\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \left(\frac{\partial(r A_u^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_u^r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_\phi \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} {}^2 f &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (5.52)$$

[例 6.5] [円柱座標系] 三次元の円柱座標系の変換則は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (5.53)$$

$(\{m\}) = (r, \theta, z)$ として、

$$(\{\partial_m x^M\}) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

$$(\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

$$J = |\{\partial_m x^M\}| = 1/r \quad (5.56)$$

$$(\{h_m\}) = (1 \quad r \quad 1) \quad (5.57)$$

各種微分演算は次のようになる。

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_u^r)}{\partial r} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial(r A_u^z)}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_u^z}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial A_u^z}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_u^\phi)}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r \right. \\ &\quad \left. + r \left(\frac{\partial A_u^r}{\partial z} - \frac{\partial A_u^z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\phi + \left(\frac{\partial(r A_u^\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_u^r}{\partial \phi} \right) \mathbf{u}_z \right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5.61)$$

第6章

一般相対性理論

リーマン幾何学と言えば、最大の応用分野は一般相対性理論である。本章では、一般相対性理論に限って、リーマン幾何学について述べよう。

6.1 等価原理

一般相対性理論とは重力を扱う理論である。特殊相対性理論で、重要な電磁気による力を扱っているのに、重力を扱わなかったのは、アインシュタインの心の中に、当初から重力は一般の力とは別であるという意識があったのだと思われる。その主たる原因は、重力質量 m_G と慣性質量 m_I の一致である。何故どんな質量の物体でも、同じ軌跡で落下するのであろうかという疑問に対し、アインシュタインは、空間の構造に起因するから、こうなると考えたのである。空間と言っても時間軸を含めた四次元空間である。

本稿をお読みの方はどなたも重力が $F = mg$ で与えられ、ニュートンの第二法則が $F = ma$ で与えられていることをご存知であろう。しかし、この二つの m が何故共通の値なのかを疑った人は意外に少いのではないだろうか。私も疑わなかった者の一人である。生活体験から、重いものや軽いものがあることは分っていたので $F = mg$ は簡単に理解できる。一方、私はガリレーの落下実験や惑星の運動などから、何故、これらは質量に依らず

同じような軌跡を描くのだろうという疑問を感じたことはあった。そして、 $F = ma$ の式を見て、なるほど、だから物体は質量に依らない運動をするのだと納得してしまったのである。もちろん、その瞬間は何故同じ m を使うのだろうという疑義は頭をよぎったのであるが、かなり早いうちにその疑問は維持されることなく消え去ったという気がする。ここにこだわり続けたアインシュタインは正に凄いとしか評価できない。

より具体的には、重力のある空間で、自由落下しているエレベーターを考えると、その中では重力は感じられない。つまり、エレベータ内は慣性系 (inertial system) になっている。このエレベーター内にいる人間は、自分が加速系にいて重力落下をしているのか、慣性系にいるのかを区別する方法はない。また、エレベーター内で等速度運動をしているどんな質量の物体も、外から見ると、すべて同じ加速度で落下しているように見える。つまり、重力とはこれら二つの系の座標変換の結果、現われてくる量であると考えたのである。エレベータの思考実験の結果、エレベータ内では光も直線運動するはずである。ということは、重力のある系で観測すると、光も質量のある物質と同じように、放物線を描くことになる。光の落下が簡単には観測できないのは、光が余りにも高速すぎて、落下量よりも水平移動距離の方が著しく大きいからであろう。

さて、質量があろうとなかろうと重力の影響を受けるとすると、これは球面座標系のように空間が歪んでいると理解する方が自然である。つまり物体も光線もこの曲った空間の測地線に沿って移動しているだけではないだろうか。こうした大胆な仮説に基づいて、重力と空間歪の関係性を求め、さらには重力の厳選である質量 (特殊相対性理論の結論から、質量というよりはエネルギーと呼ぶ方がよい) と空間歪との関係を導出したものが、一般相対性理論である。このように、適切な座標系を選ぶことで、特殊相対性理論が働く慣性系 (inertial system) が得られることを、等価原理 (equivalence principle) と呼ぶ。

等価原理とは、重力場のなかで、すべての物体が、質量に依存せず、同じ重力加速度で運動することであるとも言える。そこで、等価原理の証明には

m_G/m_I が一定であることを実証すればよい。古くはガリレオのピサの斜塔での自由落下実験があるが、より正確には振子の錘の質量を変える、あるいは捻れの平衡などの方法がある。捻れの平衡について、若干説明しよう。地上の質点には重力以外に遠心力のような加速力が働く。前者は m_I に、後者は m_G に比例する。二つの異なる質点を用意し、この二つを棒で繋いで、適切な位置に支点をとり、下向きに働く重力に対して平衡をとる。これらの質点には地軸と垂直に加速力も働いているので、もし、重力質量と慣性質量に差があると、加速力の方では平衡がとれないことになり、この天秤は回転を初める。この回転のトルクを調べることにより、二つの質点の m_G/m_I に差があるかを調べることができる。この実験の結果、現在 11 桁の確度で、質量比は一定と言える。つまり、等価原理は成立している可能性が高いのである。

6.2 特殊相対性理論の概要

本書は相対性理論の書ではないため、極めて簡略に、特殊相対性理論 (special theory of relativity) の概要を紹介しておこう。

二つの慣性系 (inertial system) を考え、 S' 系は S 系に対し、 x 軸方向に V の速度で移動しているとする。このとき、いずれの座標系でも光が同じ c の速度を持つという条件と、両座標系の対等性から、次式の変換式が得られる ($\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$)。

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (6.1)$$

この変換で、次の量が不変量となることがわかる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - d(ct')^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(ct)^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

これが、慣性系における線素の定義である。一般の曲線座標系では ds を線素とするが、相対論では $d\tau$ を線素とすることが多いため、両方を併記した。

この章では、 $(x^m) = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, (ct))$ としよう。この結果、計量テンソルに対し、次式が成立する。

$$(\{g_{\mu'\nu'}\}) = (\{g_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

となる。また、その逆行列から、次式も得られる。

$$g^{\mu'\nu'} = g^{mn} \quad (6.4)$$

言うまでもなく、この空間では、接続係数もリーマン曲率もすべて0となる。

四元速度 (four velocity) \mathcal{V}^m と呼ばれる相対論的速度を次のように定義する。

$$(\{\mathcal{V}^m\}) = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{d(ct)}{d\tau} \right) \quad (6.5)$$

線素の式 6.2 の両辺を $d\tau^2$ で割ることにより、次の不変量が得られる。

$$g_{mn}\mathcal{V}^m\mathcal{V}^n = (\mathcal{V}^4)^2 - (\mathcal{V}^1)^2 - (\mathcal{V}^2)^2 - (\mathcal{V}^3)^2 = c^2 \quad (6.6)$$

以後、座標以外の四元量には数字のサフィックスを付すものとする。これに対し、古典量には x, y, z などのサフィックスを付すこととする。四元量と古典量の間の変換には、しばしば $dt/d\tau$ が現われる。式 6.2 の両辺を $d(ct)^2$ で除すことにより、次式が得られる。

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{(v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta_v^2} = \frac{1}{\gamma_v} \quad (6.7)$$

ここで、 β_v, γ_v は座標間の速度 V による β, γ ではなく、質点そのものの古典速度 $v = \sqrt{(v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2}$ によるものであることを示している。 γ_v はおよそ1であるが、低速度近似では速度の二乗に比例して増加する。この γ_v を用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^1 &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} = \gamma_v v^x & \mathcal{V}^2 &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = \gamma_v v^y \\ \mathcal{V}^3 &= \frac{dz}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz}{dt} = \gamma_v v^z & \mathcal{V}^4 &= \frac{d(ct)}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma_v c \end{aligned} \quad (6.8)$$

などが得られる。

また、 m_0 を質点の静止質量として、四元運動量 (four momentum) \mathcal{P}^m を次式で定義する。

$$(\{\mathcal{P}^m\}) = m_0(\{\mathcal{V}^m\}) = m_0 \left(\frac{dx}{d\tau} \quad \frac{dy}{d\tau} \quad \frac{dz}{d\tau} \quad \frac{d(ct)}{d\tau} \right) \quad (6.9)$$

これから、古典的運動量との関係は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^1 &= \gamma_v p^x & \mathcal{P}^2 &= \gamma_v p^y \\ \mathcal{P}^3 &= \gamma_v p^z & \mathcal{P}^4 &= \gamma_v m_0 c \end{aligned} \quad (6.10)$$

さて式 6.6 を τ で微分すると、

$$g_{mn} \mathcal{V}^m \frac{d\mathcal{V}^n}{d\tau} = 0$$

という $g_{mn} \mathcal{V}^m (d\mathcal{V}^n/d\tau)$ が不変量であることが導かれる。さらにこれから

$$g_{mn} \mathcal{V}^m \mathcal{P}^n = 0$$

となり、 $g_{mn} \mathcal{V}^m \mathcal{P}^n$ も不変量であることが導かれる。これは、わざわざ証明しなくても、座標変換において、スカラー量である内積は不変量であることを知っていれば自明のことである。

運動量の第四要素 \mathcal{P}^4 を少し変形してみよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^4 &= \gamma_v m_0 c = m_0 c \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} \\ &\doteq m_0 c (1 + \beta_v^2/2) = m_0 c + \frac{m_0}{2c} [(v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2] \end{aligned} \quad (6.11)$$

右辺第二項は運動エネルギーを c で除したものであるので、次式の成立する可能性が高い。

$$E = c\mathcal{P}^4 \quad (6.12)$$

式 6.6 の両辺に $(m_0 c)^2$ を掛け、空間運動量の項を右へ移項することにより、次式が得られる。

$$E^2 = (c\mathcal{P}^4)^2 = (m_0 c^2)^2 + (c\mathcal{P}^1)^2 + (c\mathcal{P}^2)^2 + (c\mathcal{P}^3)^2 \quad (6.13)$$

この右辺をまとめて、 $(mc^2)^2$ と書くことがある。

$$E = mc^2 \quad (6.14)$$

m_0 を静止質量 (static mass)、 m を相対論的質量 (relativistic mass) と呼ぶ。この場合、式 6.11 の両辺を c 倍し、最初の等号と、式 6.14 を比較すると、次式が得られる。

$$m = \gamma_v m_0 \quad (6.15)$$

が成立する。

四元力 (four force) が次式を満すものとしよう。

$$\mathcal{F}^m = \frac{d\mathcal{P}^m}{d\tau} \quad (6.16)$$

これから直ちに $\mathcal{V}^m \mathcal{F}^m$ が不変量であることがわかる。この両辺に $d\tau$ を掛けると、

$$\mathcal{F}^4 d\tau = -\mathcal{F}^1 dx - \mathcal{F}^2 dy - \mathcal{F}^3 dz$$

が得られるが、右辺は古典的近似では明かにこの質点が受ける仕事量である。つまり質点の持つエネルギーの変化ということになる。したがって左辺の $c\mathcal{F}^4$ は単位時間当りの質点のエネルギー増加率ということになる。式で表すと、

$$\mathcal{F}^4 = \frac{dE/c}{d\tau}$$

両辺を τ で積分すると式 6.12 と矛盾しない結果が得られる。

本節では四元量が初めて登場したので、 \mathcal{V}^m 、 \mathcal{P}^m 、 \mathcal{F}^m などと飾りフォントを用いたが、以後の節では、 v^m 、 p^m 、 F^m 、あるいは数字サフィックスにより表すこととする。古典的量は x 、 y 、 z をサフィックスとする。

6.3 エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) の概念は特殊相対性原理から導かれるが、一般相対性原理で重要な役割を演ずるため、ここで説明しておこう。エネルギー運動量テンソルはまず電磁気学から確立されたため、まずその議論を示そう。

ローレンツ力の四元化をしてみよう。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を四元化しようとする、まず古典的速度 \mathbf{v} が気になる。これを四元速度の成分 v^1, v^2, v^3 にするには全体を $\gamma_v (= 1/\sqrt{1-v^2/c^2})$ 倍すればよさそうである (v は古典的速度の絶対値)。こうすると \mathbf{F} 、 \mathbf{v} が四元速度になるだけでなく、右辺第一項の $\gamma_v \mathbf{E}$ も、 $v^4(\mathbf{E}/c)$ と記載できるようになる。^{*1}

ローレンツ力の式の両辺に \mathbf{v} を内積として掛けてみよう。

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

これを γ_v/c 倍すると次式のように四元力の時間項となる。

$$F^4 = \gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c = Q(v^1 E_x/c + v^2 E_y/c + v^3 E_z/c) \quad (6.17)$$

このように、四元力 F^m を $(\gamma_v \mathbf{F}, \gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c)$ とすると、ローレンツ力は次のようにまとめることができる。

$$F^m = QB_n^m v^n \quad (6.18)$$

ただし、 B_n^m は電磁テンソル (electromagnetic tensor) と呼ばれ、次の

^{*1} 古典的量はベクトルまたは x, y, z のサフィックスを付け、四元量は m や数字のサフィックスを付ける。

ように定義される。

$$(\{B_n^m\}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

第四行と四元速度の積は、式 6.17 に対応する。また、これから導かれる反変テンソル $B^{mn} = B_k^m g^{kn}$ 、共変テンソル $B_{mn} = g_{mk} B_n^k$ も、今後使われるので示しておこう。

$$(\{B^{mn}\}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

この場合には第四列のみが符号反転している。

$$(\{B_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

この場合には第四行のみが符号反転している。 B^{mn} も B_{mn} も、反対称テンソルになっていることに注意してほしい。このように、反変テンソル、共変テンソル、混合テンソルと複数存在するのは、やや面倒であるが、第四列か第四行の符号が反転するだけであり、また式の変形に当たっても、計量テンソルを掛けるだけで簡単に変更できるので、慣れてほしい。

さて、このテンソルの各成分には電場や磁場の成分が入っているが、電場や磁場は、相対論の世界では、どうしてもベクトルで表現することができず、このように 4×4 のテンソルになってしまうのである。この後に現れるポテンシャルが、簡単なベクトルで表されることを考慮すると、ここでも、ポテンシャルのほうが根源的な量であることを、感じざるを得ない。

電磁場を四元テンソルで表したが、マクスウェル方程式を、この電磁テンソルを使って表してみよう。電荷や電流などの源との関連の $\text{div } E$ 式およ

び $\text{rot } B$ 式は、次のようになる。

$$\partial_m B^{mn} = -\mu_0 J^n \quad (6.22)$$

ただし、 J^n の成分は $(J, c\rho)$ である。一方、源の入っていない $\text{rot } E$ 式および $\text{div } B$ 式は、やや複雑な表現で与えられる。

$$\partial_k B_{mn} + \partial_m B_{nk} + \partial_n B_{km} = 0 \quad (6.23)$$

ローレンツ力の座標変換を考えてみよう。この際、速度もローレンツ変換されるが、 B_n^m も変換されるとしないと、うまく行かない。式 6.18 の左から順変換係数を掛けると、左右はローレンツ変換される。

$$\begin{aligned} F^{\mu'} &= \partial_m^{\mu'} F^m = Q \partial_m^{\mu'} B_n^m v^n = Q \partial_m^{\mu'} B_n^m \left(\partial_{\nu'}^n \partial_k^{\nu'} \right) v^k \\ &= Q \left(\partial_m^{\mu'} B_n^m \partial_{\nu'}^n \right) \left(\partial_k^{\nu'} v^k \right) \end{aligned}$$

第三の等号の際、 B_n^m と v^n の間に $\left(\partial_{\nu'}^n \partial_k^{\nu'} \right)$ を入れたが、 $(\partial x^n / \partial x^{\nu'}) (\partial x^{\nu'} / \partial x^k) = \delta_k^n$ であり、さらに $\delta_k^n v^k = v^n$ となることに注意してほしい。これより、 B に対する変換則が得られる。

$$B_{\nu'}^{\mu'} = \partial_m^{\mu'} B_n^m \partial_{\nu'}^n \quad (6.24)$$

この変換則を利用すると、電磁場の各成分の変換則が次のように誘導できる。

$$\begin{aligned} B_x' &= B_x & E_x'/c &= E_x/c \\ B_y' &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) & E_y'/c &= \gamma(E_y/c - \beta B_z) \\ B_z' &= \gamma(B_z - \beta E_y/c) & E_z'/c &= \gamma(E_z/c + \beta B_y) \end{aligned} \quad (6.25)$$

点電荷に働く力は、点電荷に運動量を与えるので、その分、電磁場の運動量が減じたと理解しないと、運動量一定の原理が成立しなくなる。分布した電荷や電流に働く力 f は、ローレンツ力を拡張した次式で与えられる。

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (6.26)$$

これから、電磁場の運動量を求めることができる。同様に、ローレンツ力の式と v の内積から、エネルギーの減少が計算できる。

$$f \cdot v = J \cdot E \quad (6.27)$$

電磁気学では、これらの式より電磁場の運動量とエネルギーを導出することができる。

これら二つの式を $\gamma_v = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍すると、四元ベクトルでまとめることができる。

$$f^n = B_k^n J^k \quad (6.28)$$

この右辺の J^k を、式 6.22 を利用して場で置き換える。

$$f^n = -\frac{1}{\mu_0} B_k^n \partial_m B^{mk} \quad (6.29)$$

すると、この式の右辺は次式のように変形できる。

$$f^n = -\partial_m T_{em}^{mn} \quad (6.30)$$

ただし、 T_{em}^{mn} は次式で定義される。また、em は電磁場の意味である。

$$T_{em}^{mn} = \frac{1}{\mu_0} \left(B^{mk} B_k^n - \frac{1}{4} g^{mn} B^{kl} B_{kl} \right) \quad (6.31)$$

その証明は以下のようなものである。

$$\begin{aligned} \partial_m (\mu_0 T_{em}^{mn}) &= B_k^n \partial_m B^{mk} + B^{mk} \partial_m B_k^n \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{mn} (B^{kl} \partial_m B_{kl} + B_{kl} \partial_m B^{kl}) \end{aligned} \quad (6.32)$$

まず式 6.32 の第一項は $-\mu_0 f^n$ であり、第二項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} B^{mk} \partial_m B_k^n &= g^{nl} B^{mk} \partial_m B_{lk} = \frac{1}{2} g^{nl} B^{mk} (\partial_m B_{lk} + \partial_m B_{lk}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{nl} B^{mk} (\partial_m B_{kl} + \partial_k B_{lm}) \end{aligned}$$

ここで、この式の三番目の等号であるが、第一項については $B_{lk} \rightarrow -B_{kl}$ と置き直している。また、第二項については $m \leftrightarrow k$ と置き直し、さらに $B^{km} \rightarrow -B^{mk}$ としている。また式 6.32 の第三項は、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}g^{mn}(B^{kl}\partial_m B_{kl} + B_{kl}\partial_m B^{kl}) &= -\frac{1}{2}g^{mn}B^{kl}\partial_m B_{kl} \\ &= -\frac{1}{2}g^{nl}B^{mk}\partial_l B_{mk} \end{aligned}$$

ここで、まず最初の等号で、第二項の B_{kl} の昇階と B^{kl} の降階を同時に行うことで、計量テンソルが残らないようにし、二項を同じものにする。二番目の等号では、 $m \leftrightarrow l$ と置き換える。続いて $m \leftrightarrow k$ と置き換える。 $g^{ln} \rightarrow g^{nl}$ とする。

したがって、式 6.32 は

$$\partial_m T_{\text{em}}^{mn} = -f^n - \frac{1}{2}g^{nl}B^{mk}(\partial_m B_{kl} + \partial_k B_{lm} + \partial_l B_{mk}) = -f^n \quad (6.33)$$

ここで、最後の括弧内は式 6.23 であることを利用して 0 にしている。これで証明は終りである。

式 6.31 の B_k^m を昇階すると、次式が得られる。

$$T_{\text{em}}^{mn} = \frac{1}{\mu_0} \left(B^{mk} g_{kl} B^{ln} - \frac{1}{4} g^{mn} B^{kl} B_{lk} \right) \quad (6.34)$$

T_{em}^{mn} は電磁場のエネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) と呼ばれる。各成分は B_i と E_i の積和で与えられるが、それらは、マクスウェル応力テンソル (Maxwell stress tensor) T_{em}^{ij} の各成分、電磁場の運動量 (momentum of electro-magnetic field) g^i 、ポインティングベクトル (Poynting vector) の各成分 S^i 、および電気エネルギー (electric energy) u_e と磁気エネルギー (magnetic energy) u_m の和と一致するこ

とが知られているため、これらを使って記載したものを示す。

$$(\{T_{\text{em}}^{mn}\}) = \begin{pmatrix} T_{\text{em}}^{xx} & T_{\text{em}}^{xy} & T_{\text{em}}^{xz} & -cg^x \\ T_{\text{em}}^{yx} & T_{\text{em}}^{yy} & T_{\text{em}}^{yz} & -cg^y \\ T_{\text{em}}^{zx} & T_{\text{em}}^{zy} & T_{\text{em}}^{zz} & -cg^z \\ -S^x/c & -S^y/c & -S^z/c & -(u_e + u_m) \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

これにより、電磁氣的運動量と電磁氣的エネルギーの両概念が統合されたことが理解できよう。なお、式 6.28 と式 6.30 から、

$$B_k^n J^k = -\partial_m T_{\text{em}}^{mn} \quad (6.36)$$

が得られる。

続いて、電磁場から力を受ける荷電粒子系を考えよう。これに対し、次のようなテンソルを考える。テンソルの下サフィックス mat は物質系という意味である。

$$T_{\text{mat}}^{mn} = \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i v_i^m(\tau_i) v_i^n(\tau_i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \quad (6.37)$$

$m = 4$ としてみると、 T_{mat}^{mn} が運動量密度やエネルギー密度になっていることが理解できよう。 $n \neq 4$ 、 $m \neq 4$ の部分は、古典力学では扱われていないが、恐らく物質系の応力になるのであろう。これは物質系のエネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) と呼ばれる。

この両辺を x_m で微分してみよう。

$$\begin{aligned} \partial_m T_{\text{mat}}^{mn} &= \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^m(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^n(\tau_i)}{d\tau_i} \partial_m \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \\ &= - \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^n(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{d^2 x_i^n(\tau_i)}{d\tau_i^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N Q_i c \int d\tau_i B_k^n(\mathbf{x}_i(\tau_i)) \frac{dx_i^k(\tau_i)}{d\tau_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \\
&= B_k^n(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^N Q_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^k(\tau_i)}{d\tau_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \\
&= B_k^n J^k
\end{aligned} \tag{6.38}$$

二行目の等号は $\partial\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\partial x^n = -\partial\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\partial y^n$ を利用している。三行目の等号は部分積分を利用している。4行目は荷電粒子の加速度をローレンツ力へ置き換えている。以下は容易に推定できると思う。

次式で、全エネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) を定義する。

$$T^{mn} = T_{\text{mat}}^{mn} + T_{\text{em}}^{mn} \tag{6.39}$$

式 6.36 と式 6.38 を連立すると、エネルギー運動量保存則 (energy momentum conservation law) と呼ばれる次の式が導かれる。

$$\partial_m T^{mn} = 0 \tag{6.40}$$

6.4 測地線と重力場中の質点の運動

等価原理から考えると、重力場の影響下における物体の運動は、慣性系と異なる計量テンソルを持つ空間の測地線で表されそうである。測地線の式 3.42 を再掲しておこう。

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{mn}^k \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} = 0 \tag{6.41}$$

物体の運動の軌道に沿っては、 $ds^2 < 0$ となるため、 s の代わりに、 $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ の関係にある τ を使っている。

測地線の方程式も、重力下におけるニュートンの方程式と同じく二階の微分方程式であり、同じ数の自由度を持っている。問題を簡単にするために、

光速に比べ十分低速の粒子を対象にしよう。この仮定により $d\tau \doteq dx^4/c$ とできる。また、 $dx^1/d\tau$ などは $dx^4/d\tau \doteq c$ に比べ、圧倒的に小さいと言える。すると、上式 6.41 の Γ_{mn}^k の効果は Γ_{44}^k のみしか効いてこないことがわかる。

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{44}^k \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} = 0 \quad (6.42)$$

さて、重力が x 方向にしかかからないとして、この式がニュートンの式と近似的に一致するにはどうしたらよいだろうか。ニュートンの式は、重力加速度を g とするとき、 $d^2x^1/dt^2 = g$ である。幸いにして、低速における $dx^4/d\tau$ はほぼ c であるので Γ_{44}^k の項は $k = 1$ に対してだけ存在すればよい。さらに、 $\Gamma_{44}^1 (dx^4/d\tau)^2 \doteq c^2 \Gamma_{44}^1$ で、これが $-g$ であることより、 $\Gamma_{44}^1 = -g/c^2$ が得られる。^{*2}この他の空間座標方向には加速はないため、 $k = 2, 3$ に対して $\Gamma_{mn}^k = 0$ となる。

次に計量テンソルを推定してみよう。 g_{mn} は慣性系の値とほとんど等しく、僅かなずれしかないものとしよう。すると、計量テンソルから接続係数を求める式 3.22 より、 $\partial_1 g_{44}$ 、 $\partial_4 g_{14}$ 、 $\partial_4 g_{41}$ 、の三項しか値を持ちえない。 g_{mn} は x 軸方向にしか変動していないだろうから、これから、 g_{44} だけが存在することになる。つまり、

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{44} (= -\frac{g}{c^2}) \quad (6.43)$$

が得られる。 g^{11} がほぼ 1 であるので、 $g_{44} = 2gx/c^2 + \text{const}$ が得られる。より一般的には、 $\phi(x) = \text{const} - gx$ を遠方に行くほど値が小さくなる $x \doteq 0$ 付近の重力ポテンシャル、かつ 1 に比べ十分小さい値を持つとして、

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi(x)\right) \quad (6.44)$$

^{*2} g の記号は、計量テンソルを縮約した g_m^m にも使われるが、これは δ_m^m 、つまり空間の次元数に等しく、余りに自明でかつ簡単に計算できるため、本書では現われないので、混乱はないだろう。

とすればよい。これ以外の g_{mn} は δ_{mn} に等しいので、線素は次式のようになる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{2}{c^2} \phi(x)\right) d(ct)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - (1 - 2gx/c^2) d(ct)^2 \end{aligned} \quad (6.45)$$

改めて、これらの g_{mn} からスタートして測地線の方程式を解いておく値がある。 Γ_{mn}^k は $\Gamma_{44}^1 = -g/c^2$ 、 $\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = -g/[c^2(1 - 2gx/c^2)]$ を除いてすべて 0 となる。そこで、 $k = 1, 4$ に対する測地線方程式は、 $v^k = dx^k/d\tau$ として、次式のようになる。

$$\frac{dv^1}{d\tau} - \frac{g}{c^2} (v^4)^2 = 0 \quad (6.46)$$

$$\frac{dv^4}{d\tau} - \frac{2g}{c^2} \frac{1}{1 - 2gx/c^2} v^1 v^4 = 0 \quad (6.47)$$

式 6.47 の両辺を v^4 で割って、 τ で積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d(\log v^4)}{d\tau} + \frac{d \log(1 - 2gx/c^2)}{d\tau} &= 0 \\ v^4(1 - 2gx/c^2) &= v_0^4 \end{aligned} \quad (6.48)$$

積分定数 v_0^4 は $x = 0$ における v^4 である。

これから得られた v^4 を式 6.46 へ代入すると、 $x^1 (= x)$ だけの微分方程式が得られるが、容易には解けない。そこで、今迄の例で度々行ったように、線素の式を利用しよう。

$$-c^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (1 - 2gx/c^2)(v^4)^2$$

$v^2 = v_0^2$ 、 $v^3 = v_0^3$ なので、

$$v^1 = \sqrt{\frac{(v_0^4)^2}{1 - 2gx/c^2} - c^2 - (v_0^2)^2 - (v_0^3)^2}$$

残念ながら、この微分方程式は解けない。 $2gx/c^2$ が 1 に比べ十分小さい場合には $1/(1 - 2gx/c^2) \doteq 1 + 2gx/c^2$ とすることで、解くことが可能である。

$$\tau - \tau_0 = \frac{\sqrt{(v_0^4)^2(1 + 2gx/c^2) - c^2 - (v_0^2)^2 - (v_0^3)^2}}{(v_0^4)^2 g/c^2}$$

これを x について解くと、

$$x = g(v_0^4/c)^2(\tau - \tau_0)^2/2 + c^2[c^2 + (v_0^2)^2 + (v_0^3)^2 - (v_0^4)^2]/2g(v_0^4)^2$$

これより、質点の運動方程式が得られる。

$$x = \frac{g}{2} \left(\frac{v_0^4}{c} \right)^2 (\tau - \tau_0)^2 + x_0 \quad (6.49)$$

$v_0^4 \doteq c$ であるので、ほぼ、一定重力場の落下の式と一致する。

以上の議論から、質点の運動は重力場の影響を計量テンソルに反映させた歪んだ空間の測地線で表されることがわかった。以後は、これをより一般化するこゝで、一般相対性理論に結び付けることになる。

6.5 アインシュタイン方程式

準備が整ったので、一般相対性理論 (general theory of relativity) を紹介しよう。ニュートンの重力方程式をポアソン方程式で表すと、次式のようになる。

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad (6.50)$$

ところで、 $\phi(\mathbf{x})$ は式 6.44 より、計量テンソルに対応することから、この式の左辺は恐らく計量テンソルの二次微分になるであろう。また、右辺は質量密度、つまりエネルギー運動量テンソルになることが予想できる。

第 6.3 節のエネルギー運動量テンソルは慣性系におけるものであるので、一般相対論では若干の補正が必要である。 $\delta(\mathbf{x})$ 関数は体積全体で積分して 1 になる必要があるので、一般相対論の世界では $\delta(\mathbf{x})/\sqrt{-\{g_{mn}\}}$ に変更

する必要がある (式 2.24 参照)。そこで、 T_{mat}^{mn} と T_{em}^{mn} は次式のようになる。

$$T_{\text{mat}}^{mn} = \frac{1}{\sqrt{-|\{g_{mn}\}|}} \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^m(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^n(\tau_i)}{d\tau_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)) \quad (6.51)$$

$$T_{\text{em}}^{mn} = \frac{1}{m_0} \left(B^{mk} g_{kl} B^{ln} - \frac{1}{4} g^{mn} B^{kl} B_{kl} \right) \quad (6.52)$$

また、エネルギー-運動量の保存則は、空間微分が共変微分に変って、

$${}_m T^{mn} = {}_m (T_{\text{mat}}^{mn} + T_{\text{em}}^{mn}) = 0 \quad (6.53)$$

ここまで準備ができたところで、右辺はエネルギー-運動量テンソルとしてみよう。左辺の候補としては、今迄議論した各章から計量テンソルの二次微分までを含むテンソルということになる。第 3 章の共変微分で現われた接続係数はテンソルではない。第 4 章の曲率に示したいくつかの量には、計量テンソルの二次微分が含まれている。曲率テンソルおよびそれを縮約したリッチテンソルやスカラー曲率である。さらに、計量テンソル自身も 0 次微分のテンソルである。右辺が 2 階のテンソルであるので、4 階の曲率テンソルは候補とならない。リッチテンソル R^{mn} は有力な候補である。またスカラー曲率に計量テンソルを掛けた $g^{mn} R$ も候補となる。さらに計量テンソル g^{mn} そのものも候補である。

このため、左辺をこれらの線形結合としてみよう。

$$c_1 R^{mn} + c_2 g^{mn} R + c_3 g^{mn} = -c_4 T^{mn}$$

右辺の共変微分が 0 であることから左辺の共変微分も 0 のはずである。

$$c_1 {}_m R^{mn} + c_2 {}_m (g^{mn} R) + c_3 {}_m g^{mn} = 0$$

まず、式 3.40 を縮約して ${}_m g^{mn} = 0$ である。また、式 4.26 および式 4.27 より、 ${}_m (g^{mn} R) = 2 {}_m R^{mn}$ が成立するので、これらを上式に代入すると、

$$(c_1 + 2c_2) {}_m R^{mn} = 0$$

つまり、 $c_2 = -c_1/2$ が得られる。したがって、

$$R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R - \Lambda g^{mn} = -KT^{mn} \quad (6.54)$$

が得られる。 $\Lambda = -c_3/c_1, K = c_4/c_1$ と置き換えている。 Λg^{mn} は宇宙項 (cosmological term) と呼ばれ、宇宙のサイズになると影響が現われてくるが、アインシュタインも最後まで導入すべきかを迷った項である。またその係数 Λ は、宇宙定数 (cosmological constant) と呼ばれるが、いまだに値が定まっていない定数である (もしかすると 0 かも知れない)。一方、 K はニュートンの重力場の方程式との対応から値を決めることができる。

式 4.26 に示したアインシュタインテンソル $G^{mn} = R^{mn} - g^{mn}R/2$ を使おうと、もう少し式を簡単に表すことが可能であるが、だからといって計算が簡単になるわけではないので、以後はこの形の式を利用する。

式 6.54 の両辺に g_{mn} を掛けて縮約を行う。 $g_{mn}g^{mn} = \delta_m^m = 4$ であることに着目すると、

$$R - 2R - 4\Lambda = -Kg_{mn}T^{mn}$$

これから得られた R を式 6.54 へ代入すると、

$$R^{mn} = -K \left(T^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}g_{kl}T^{kl} \right) - \Lambda g^{mn} \quad (6.55)$$

この式は式 6.54 と等価であるため、この式を使って K を求めよう。

まず、重力場は十分小さいとすると、その計量テンソルへの影響も小さいだろうから、 $g^{mn} \doteq \eta^{mn}$ である。接続係数も次のように近似できるだろう。

$$\Gamma_{km}^n \doteq \frac{1}{2}\eta^{nl} (\partial_k g_{ml} + \partial_m g_{kl} - \partial_l g_{km})$$

さらに、リッチテンソルも次のように近似できる。

$$\begin{aligned} R_{mk} &= R_{m, kn}^n = (\partial_k \Gamma_{nm}^n + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^l) - (\partial_n \Gamma_{km}^n + \Gamma_{nl}^n \Gamma_{km}^l) \\ &\doteq \partial_k \Gamma_{nm}^n - \partial_n \Gamma_{km}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \eta^{nl} (\partial_k \partial_n g_{ml} + \partial_k \partial_m g_{nl} - \partial_k \partial_l g_{nm} \\
&\quad - \partial_n \partial_k g_{ml} - \partial_n \partial_m g_{kl} + \partial_n \partial_l g_{km}) \\
&= \frac{1}{2} \eta^{nl} (\partial_k \partial_m g_{nl} - \partial_k \partial_l g_{nm} - \partial_n \partial_m g_{kl} + \partial_n \partial_l g_{km})
\end{aligned}$$

ここで、接続係数は十分小さいということで、その二次の項は削除した。後述との関係から R_{44} だけを計算しよう。また、定常状態を考え $\partial_4 = 0$ としよう。

$$\begin{aligned}
R_{44} &= \frac{1}{2} \eta^{nl} (\partial_4 \partial_4 g_{nl} - \partial_4 \partial_l g_{n4} - \partial_n \partial_4 g_{4l} + \partial_n \partial_l g_{44}) = \frac{1}{2} \eta^{nl} \partial_n \partial_l g_{44} \\
&= \frac{1}{2} \delta^{44} g_{44} = \frac{1}{2} \delta^{44} \left(-1 - \frac{2}{c^2} \phi(\mathbf{x}) \right) = -\frac{1}{c^2} \delta^{44} \phi(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

g_{44} と $\phi(\mathbf{x})$ の関係には式 6.44 を利用した。 R^{44} も $R^{44} = g^{4m} g^{4n} R_{mn} = g^{44} g^{44} R_{44} \doteq R_{44}$ なので、同じ式で与えられる。

次に式 6.55 の右辺を考えよう。まず、 T^{mn} として T_{mat}^{mn} のみを考える。粒子の速度が c に対し十分遅い場合、 T^{mn} は $m = n = 4$ を除いてほぼ 0 である。また、 $T^{44} \doteq \rho c^2$ であるので、上式の右辺は $-K \rho c^2 / 2 - \Lambda$ となる。

これらの結果、式 6.55 で $m = n = 4$ とした場合の式が得られる。

$$-\frac{1}{c^2} \delta^{44} \phi(\mathbf{x}) = -\frac{K}{2} \rho c^2 - \Lambda$$

式 6.50 と比較すると、 $K c^4 / 2 = 4\pi G$ および $\Lambda = 0$ が得られる。これより $K = 8\pi G / c^4$ が得られる。なお、 $\Lambda = 0$ としたが、重力場に対して無視できるぐらい小さな値を持つ可能性までは否定できない。その場合には Λ は残しておく方がよいであろう。

最終的に得られた方程式はアインシュタイン方程式 (Einstein equation) と呼ばれ、次式で与えられる。

$$R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R - \Lambda g^{mn} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{mn} \quad (6.56)$$

改めて、この式を見てみよう。右辺は分布質量を一般化したエネルギー運動量テンソルである。これにより、空間の曲率に影響が出る。その影響は計量

テンソルの g^{44} に重力ポテンシャルに対応した曲りを与える。その空間の測地線で与えられる質点の運動は、重力中の運動と同じになるのである。

式 6.56 に g^{mn} を掛けて縮約してみよう。

$$R - \frac{1}{2}4R - 4\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}T \quad (6.57)$$

得られた R を式 6.56 へ代入すると、 R^{mn} に対して解きやすい次式が得られる。

$$R^{mn} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}T) - \Lambda g^{mn} \quad (6.58)$$

6.6 シュバルツシルト解

アインシュタイン方程式は g^{mn} に対し非線形であり、条件がよくなないと、簡単には解けない。しかし、中心に質量が固まっている場合、その周辺の領域に対しては、シュバルツシルトが解を示した。周辺には質量がないため、 $T^{mn} = 0$ が成立する。また、宇宙定数も 0 としよう。そこで解くべき方程式は式 6.58 より、

$$R^{mn} = 0$$

となる。

球対称を仮定すると、線素は一般に次式で与えられる。

$$ds^2 = e^{2g(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - e^{2f(r)} c^2 dt^2$$

デカルト空間の極座標の線素と比較すると、動径方向と時間方向の計量テンソルが異なっている。これらを指数関数にしたのは、単に数学的に扱いやすくしただけで、物理的に深い意味はない。これから接続係数を計算すると、

0 でないものは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= g' & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2g} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2g} \sin^2 \theta & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(f-g)} f' \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta & \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = f' \end{aligned}$$

ここで、「 $'$ 」は r による微分である。さらに、リッチテンソルで 0 でないものを拾い出し、それらを 0 とすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -(f'' - f'g' + f'^2 - \frac{2}{r}g') = 0 \\ R_{\theta\theta} &= 1 + e^{-2g}(rg' - rf' - 1) = 0 \\ R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta = 0 \\ R_{tt} &= e^{2(f-g)}(f'' - f'g' + f'^2 + \frac{2}{r}f') = 0 \end{aligned}$$

R_{rr} と R_{tt} の式より次式が得られる。

$$f' = -g'$$

これを $R_{rr} = 0$ と $R_{\theta\theta} = 0$ へ代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} g'' - 2g'^2 + \frac{2}{r}g' &= 0 \\ 1 + e^{-2g}(2rg' - 1) &= 0 \end{aligned}$$

後式は $1 - r(e^{-2g})' - e^{-2g} = 0$ と書き換えられるので、簡単に解ける。

$$e^{-2g} = 1 - \frac{a}{r}$$

この式は $R_{\theta\theta} = 0$ から得られた前式も充足する。また、 $f' = -g'$ より次式も得られる。

$$e^{2f} = e^b \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

実はここで増えた積分定数 b は dt^2 の計量で吸収できるため、0 としても差し支えない。得られた結果を線素の形に纏めると、次のようになる。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 \quad (6.59)$$

これがシュバルツシルト解 (Schwarzschild solution) と呼ばれるものである。

ここで重力場との関係から、 a を定めることができる。式 6.44 と $\phi(r) = -GM/r$ の関係から、 $g_{44} = -(1 - 2GM/c^2 r)$ であるはずである。そこで式 6.59 と比較して a が得られる。

$$a = 2 \frac{GM}{c^2} \quad (6.60)$$

a は長さの単位を持ち、シュバルツシルト半径 (Schwarzschild radius)、もしくは重力半径 (gravitational radius) と呼ばれる。 $r = a$ では、 $g_{44} = 0$ となり、時計が無限に遅れることになり、どんな物体も光ですらそこから外へ脱出することができなくなる。そこで、この半径以下のサイズを持つ星はブラックホール (black hole) と呼ばれる。

シュバルツシルト半径の意味をより詳細に調べるために、この空間での測地線を求めてみよう。まず、得られた g_{mn} を利用して接続係数 Γ_{mn}^k を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -\frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin^2 \theta & \Gamma_{tt}^r &= \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \\ \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} & & \end{aligned}$$

これらを利用すると、以下の測地線の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \\ - r \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (6.62)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (6.63)$$

$$\frac{d^2(ct)}{d\tau^2} + \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d(ct)}{d\tau} = 0 \quad (6.64)$$

式 6.62 から解こう。軸対称性から、一般性を損なうことなく、 $\theta = \pi/2$ と仮定してよさそうである。初期条件で $\theta = \pi/2$ かつ $d\theta/dt = 0$ とすると、 $d^2\theta/d\tau^2 = 0$ となり、以後 θ は一定のままとなることがわかる。

続いて式 6.63 は、第 3 項が消えるため簡単になり、

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

となり、 τ に関する面積速度一定の法則 (conservation of areas) (角運動量保存則) が成立する。

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = h \quad (6.65)$$

続いて式 6.64 は次式の微分を実行し、両辺を $(1 - a/r)$ で除した式になっている。

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d(ct)}{d\tau} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \right] = 0$$

つまり、 ct の測地線は次式で与えられる。なお、積分定数は $r \rightarrow \infty$ における γ_v として決定できる。

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma_v(\infty) \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \quad (6.66)$$

ここで、重力半径では $dt \rightarrow \infty$ となることがわかる。したがって、どんな物体も重力半径のところを越えられないことになる。

以上の条件を式 6.61 へ代入しよう。

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{a}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{h^2}{r^3} \left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{a\gamma_v(\infty)^2}{2r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} = 0$$

これを直接解くことも可能であるが、式 6.59 の左辺を $ds^2 \rightarrow -c^2 d\tau^2$ とし、さらに両辺を $d(c\tau)^2$ で除した次式からスタートする方が、積分を一回省略できる。なお、今迄に得た諸条件を代入してある。

$$-1 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d(c\tau)}\right)^2 + \frac{h^2}{(c\tau)^2} - \gamma_v(\infty)^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \quad (6.67)$$

これより直ちに次式が得られる。

$$\frac{dr}{d(c\tau)} = -\sqrt{\gamma_v(\infty)^2 - \left(1 + \frac{h^2}{(c\tau)^2}\right) \left(1 - \frac{a}{r}\right)} \quad (6.68)$$

右辺を負としたのは、時間の経過とともに、 r が減少するからである。当然、質点を放り上げた場合には正となる。これは不定積分不能であるが、 $h = 0$ かつ $\gamma_v(\infty) = 1$ 、つまり、中心線上の運動で、かつ無限遠で質点が静止している場合の運動を計算してみると、

$$\frac{dr}{d(c\tau)} = -\sqrt{\frac{a}{r}}$$

となり、次の結果が得られる。

$$c\tau = \frac{2}{3\sqrt{a}} \left(r(\tau=0)^{3/2} - r^{3/2}\right) \quad (6.69)$$

$\tau = 0$ における半径 $r(\tau = 0)$ から任意の半径に至る経過時間には、重力半径における特異性は何も発見できない。 $\gamma_v(\infty) > 1$ の条件で、複雑な積分

を実行しても、特異性は発見できず、さらに、重力半径の内側からの運動にも特異性は発見できない。

この結果を式 6.66 へ代入すると、 t の τ に関する微分方程式が得られる。この微分方程式は簡単に解け、

$$r(\tau) = \left(r(\tau=0)^{3/2} - \frac{3\sqrt{a}c\tau}{2} \right)^{2/3}$$

として、

$$c(t-t_0) = -a\gamma_v(\infty) \left[\frac{2}{3}(r(\tau)/a)^{3/2} + 2\sqrt{r(\tau)/a} + \log \left(\frac{\sqrt{r(\tau)/a} - 1}{\sqrt{r(\tau)/a} + 1} \right) \right] \quad (6.70)$$

となる。 τ の増加とともに、 $r(\tau)$ は減少するので、右辺は増大することに注意してほしい。言うまでもないが、 $r(\tau) = a$ となったとき、右辺の対数が発散し、 $c(t-t_0)$ は無限大になる。したがって、ブラックホールが生じるのは、時間方向の特異性によることとなる。

6.7 ブラックホールはあるのか

ここまで述べたのが、従来のブラックホール説に関する説明であるが、私自身はこのブラックホール説に、かなり問題を感じている。一つの理由は、式 6.69 に示したように、固有時間 τ で入りこめる r には重力半径の特異性が現われないことである。

もう一つは、重力半径で特異性を持つ r や t という座標は、質点の運動が測地線になるように導入された座標であり、実際の寸法に裏打ちされた座標ではないからである。実際の寸法を議論するにはスケール因子 (scale factor) で補正された物差しを用いなければならない。例えば、二次元極座標で、ある半径における円周を計算するには、 $d\phi$ の積分では駄目で、スケール因子を含んだ $r d\phi$ で計算しなければならない。同様に、シュバルツシルト解で、実際の寸法を議論するには、 r 方向には $1/\sqrt{1-a/r}$ 、 ct 方向

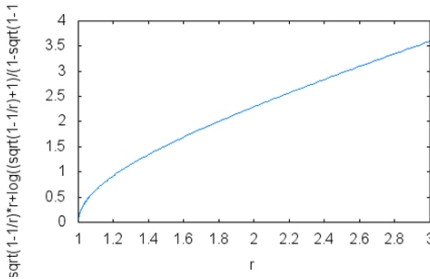


図 6.1 R (縦軸) と r ($a=1$ としている) の関係 ($R_0=0$ としている)

には $\sqrt{1-a/r}$ というスケール因子を考慮しなければならない。その結果、 $r=a$ がどの位置にくるかを知ることによって、初めて、ブラックホールのような現象が起るのかを議論しなければならないのである。

実際の半径 R と r の関係は、スケール因子を利用して次式ようになる。

$$R = \int \frac{dr}{\sqrt{1-a/r}} = r\sqrt{1-a/r} + \frac{a}{2} \log \frac{1+\sqrt{1-a/r}}{1-\sqrt{1-a/r}} + R_0$$

ここで、積分定数 R_0 は $r=a$ における R の値である。試しに $R_0=0$ としてみると、図 6.1 に示すように、 $r=a$ は $R=0$ に対応する。だとすると、重力半径は、実空間では観測できないこととなる。この図の十分遠方で、 $r \rightarrow R$ となっていると大変都合がよいのであるが、右の方を見ると、 $R-r$ は 0.6 ぐらいと、すでに R の方が r を上回って、ほぼ直線的な関係があるように見受けられる。それならば、 $R_0=-0.6$ とすればよさそうであるが、実は差は徐々に開いていくのである。これは、上記変換式に対数が入っているためである。いずれにせよ、重力半径が実世界でどの位置にくるのかを決定するには、 R_0 次第なのである。残念ながら、現在の私の能力ではこれ以上の議論はできないが、いずれにせよ $r=a$ が $R=a$ でないことだけは確かそうである。こうした結果から、私個人はブラックホール説に十分納得し

ていないのである。

続いて光の測地線を求めてみよう。光線については、式 6.59 で $ds^2 = 0$ とすればよいので、中心を通る光線については、次式が成立する。

$$\frac{dr}{dt} = \pm c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

またもや、 $r = a$ で光速は 0 となるかに見え、多くの書でも、この式により、光すら重力半径を抜けることができないと記載されている。となるが、スケール因子を考慮すると、次式のように光の速度は c であることがわかる。

$$\frac{\sqrt{(1 - a/r)^{-1} dr}}{\sqrt{1 - a/r} dt} = \pm c^2$$

つまり、光の速度は断固 c であり、重力半径における特異性はすっかり消えてしまうのである。この結果からも、実空間の重力半径は特異点でも何でもない可能性は十分高いと言えよう。

6.8 その他の相対論の効果

その他の相対論的效果が予測され、観測によりほぼ確認されている。その概要を述べる。

式 6.67 を変形すると、 $T + V = E$ の形に変形することができる。この際、 V に r^{-3} の項が入ってくる。こうした項はケプラーの惑星の運動方程式に対する摂動項として働くため、惑星の運動を乱す。その結果、重力ポテンシャルの大きなところを動く水星の近日点移動 (perihelion shift) となって観測することが可能となる。

光線の式を解く際、 $ds = 0$ とするが、そうなる複数の変数に対しては対応できなくなる。そこで、媒介変数を入れると作業が続行できる。

$$0 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2$$

光線も測地線方程式を満すので、作業はほとんど同じであるので、 σ を τ のように扱っただけとなる。この計算の結果、重力場による光の湾曲 (light bending) を導くことができる。

空間に固定された二点間の間の時間間隔は、

$$-c^2 d\tau^2 = g_{44} c^2 dt^2$$

が成立するため $\sqrt{-g_{44}}$ の影響を受ける。このため、大きな重力ポテンシャルで発射されたパルス間隔 dt に対する $d\tau$ は $\sqrt{-g_{44}}$ が小さい分、短くなる。詳細は省くが、この $d\tau$ の差が周波数の差を与える。つまり、重力ポテンシャルの小さいところでは周波数が低く見えることになる。つまり、重力赤方偏移 (gravitational redshift) を起こす。

この他にもいくつかの効果があるが、詳細は天文学などの書を参照してほしい。

索引

A
 affine connection coefficient(アフィン接続係数) 34
 affine transform(アフィン変換) ... 8, 34
 anti-symmetry(反対称性) 60

B
 basis(基底) 2
 Bianchi equation(ビアンキ恒等式) .. 61, 63
 black hole(ブラックホール) 102

C
 Cartesian coordinate system(デカルト座標系) 1
 Christoffel symbol(クリストッフェル記号) 38
 commutation(交換対称性) 60
 connection coefficient(接続係数) 34
 conservation of areas(面積速度一定の法則) 103
 contravariant(反変) 10, 15
 contravariant component(反変成分) . 15
 contravariant transform coefficient(反変変換係数) 8
 contravariant vector(反変ベクトル) .. 15
 cosmological constant(宇宙定数) 98
 cosmological term(宇宙項) 98
 covariant(共変) 10, 15
 covariant component(共変成分) 22
 covariant derivative(共変微分) 43
 covariant differential(共変微分商) .. 42
 covariant transform coefficient(共変変換係数) 9
 covariant vector(共変ベクトル) 22
 curvature tensor(曲率テンソル) 54

curvilinear coordinate system(曲線座標系) 1

D
 dual basis(双対基底) 20

E
 Einstein convention(アインシュタイン規約) 3
 Einstein equation(アインシュタイン方程式) 99
 Einstein tensor(アインシュタインテンソル) 62
 electric energy(電気エネルギー) 91
 electromagnetic tensor(電磁テンソル) 87
 energy momentum conservation law(エネルギー運動量保存則) 93
 energy momentum tensor(エネルギー運動量テンソル) 87, 91-93
 equivalence principle(等価原理) 82
 Euler equation(オイラー方程式) 48
 exact derivative(完全微分) 34, 42

F
 forward transform(順変換) 8
 four force(四元力) 86
 four momentum(四元運動量) 85
 four velocity(四元速度) 84

G
 general theory of relativity(一般相対性理論) 96
 geodesic coordinate system(測地座標系) 37
 geodesic line(測地線) 47, 48
 gravitational radius(重力半径) 102
 gravitational redshift(重力赤方偏移) 108

- I**
inertial system(慣性系) 82, 83
inner product(内積) 4
- J**
Jacobian(ヤコビアン) 26
Jacobian matrix(ヤコビ行列) 9
- K**
Kronecker delta(クロネッカーのデルタ) .
5
- L**
light bending(光の湾曲) 108
line element(線素) 3
line element vector(線素ベクトル) 3
linear coordinate system(直線座標系) 1
lowering(降階) 24
- M**
magnetic energy(磁気エネルギー) ... 91
Maxwell stress tensor(マクスウェル応力
テンソル) 91
metric tensor(計量テンソル) 3
Minkowski space(ミンコフスキー空間) 6
momentum of electro-magnetic field(電
磁場の運動量) 91
- N**
natural basis(自然基底) 2
- O**
orthogonal coordinate system(直交座標
系) 1
orthogonal curvilinear coordinate
system(直交曲線座標系) .. 1, 72
- P**
perihelion shift(近日点移動) 107
physical component(物理成分) 73
Poynting vector(ポインティングベクトル)
91
- R**
raising(昇階) 24
relativistic mass(相対論的質量) 86
reverse transform(逆変換) 9
Ricci formula(リッチの公式) 60
- Ricci tensor(リッチテンソル) 62
Riemannian geometry(リーマン幾何学) 1
Riemann Christoffel curvature
tensor(リーマン・クリストフエ
ル曲率テンソル) 54
- S**
scalar(スカラー) 16
scalar curvature(スカラー曲率) 62
scale factor(スケール因子) ... 7, 72, 105
Schwarzschild radius(シュバルツシルト半
径) 102
Schwarzschild solution(シュバルツシルト
解) 102
special theory of relativity(特殊相対性理
論) 83
spherical coordinate system(球面座標系)
13
static mass(静止質量) 86
- T**
tensor(テンソル) 16
total derivative(全微分) 34
transform(変換) 8
transform coefficient(変換係数) 8
translation(平行移動) 32
- U**
unit vector(単位ベクトル) 2, 71
- V**
vector(ベクトル) 2
- あ**
アインシュタイン規約 (Einstein
convention) 3
アインシュタインテンソル (Einstein
tensor) 62
アインシュタイン方程式 (Einstein
equation) 99
アフィン接続係数 (affine connection
coefficient) 34
アフィン変換 (affine transform) ... 8, 34
一般相対性理論 (general theory of
relativity) 96
宇宙項 (cosmological term) 98
宇宙定数 (cosmological constant) ... 98

エネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) . 87, 91-93
 エネルギー運動量保存則 (energy momentum conservation law) . 93
 オイラー方程式 (Euler equation) 48

か

慣性系 (inertial system) 82, 83
 完全微分 (exact derivative) 34, 42
 基底 (basis) 2
 逆変換 (reverse transform) 9
 球面座標系 (spherical coordinate system) 13
 共変 (covariant) 10, 15
 共変成分 (covariant component) 22
 共変微分 (covariant derivative) 43
 共変微分商 (covariant differential) ... 42
 共変ベクトル (covariant vector) 22
 共変変換係数 (covariant transform coefficient) 9
 曲線座標系 (curvilinear coordinate system) 1
 曲率テンソル (curvature tensor) 54
 近日点移動 (perihelion shift) 107
 クリストッフエル記号 (Christffel symbol) 38
 クロネッカーのデルタ (Kronecker delta) 5
 計量テンソル (metric tensor) 3
 降階 (lowering) 24
 交換対称性 (commutation) 60
 光の湾曲 (light bending) 108

さ

磁気エネルギー (magnetic energy) ... 91
 自然基底 (natural basis) 2
 重力赤方偏移 (gravitational redshift) ... 108
 重力半径 (gravitational radius) 102
 シュバルツシルト解 (Schwarzschild solution) 102
 シュバルツシルト半径 (Schwarzschild radius) 102
 順変換 (forward transform) 8
 昇階 (raising) 24
 スカラー (scalar) 16
 スカラー曲率 (scalar curvature) 62

スケール因子 (scale factor) ... 7, 72, 105
 静止質量 (static mass) 86
 接続係数 (connection coefficient) 34
 線素 (line element) 3
 線素ベクトル (line element vector) ... 3
 全微分 (total derivative) 34
 相対論的質量 (relativistic mass) 86
 双対基底 (dual basis) 20
 測地座標系 (geodesic coordinate system) 37
 測地線 (geodesic line) 47, 48

た

単位ベクトル (unit vector) 2, 71
 直線座標系 (linear coordinate system) 1
 直交曲線座標系 (orthogonal curvilinear coordinate system) 1, 72
 直交座標系 (orthogonal coordinate system) 1
 デカルト座標系 (Cartesian coordinate system) 1
 電気エネルギー (electric energy) 91
 電磁テンソル (electromagnetic tensor) .. 87
 電磁場の運動量 (momentum of electro-magnetic field) 91
 テンソル (tensor) 16
 等価原理 (equivalence principle) 82
 特殊相対性理論 (special theory of relativity) 83

な

内積 (inner product) 4

は

反対称性 (anti-symmetry) 60
 反変 (contravariant) 10, 15
 反変成分 (contravariant component) 15
 反変ベクトル (contravariant vector) . 15
 反変変換係数 (contravariant transform coefficient) 8
 ビアンキ恒等式 (Biannki equation) . 61, 63
 物理成分 (physical component) 73
 ブラックホール (black hole) 102
 平行移動 (translation) 32
 ベクトル (vector) 2
 変換 (transform) 8

変換係数 (transform coefficient)	8
ポインティングベクトル (Poynting vector)	91
ま	
マクスウェル応力テンソル (Maxwell stress tensor)	91
ミンコウスキー空間 (Minkowski space)	6
面積速度一定の法則 (conservation of areas)	103
や	
ヤコビアン (Jacobian)	26
ヤコビ行列 (Jacobian matrix)	9
四元運動量 (four momentum)	85
四元速度 (four velocity)	84
四元力 (four force)	86
ら	
リーマン幾何学 (Riemannian geometry)	1
リーマン・クリストッフェル曲率テンソル (Riemann Christoffel curvature tensor)	54
リッチテンソル (Ricci tensor)	62
リッチの公式 (Ricci formula)	60