回路理論

岡部 洋一
放送大学教授 (東京大学名誉教授)

2007 年 6 月 30 日
起草: 2004 年 9 月 1 日

通常は Laplace 変換を使って説明される周波数応答と過渡応答の関係を、微分方程式の解という立場で説明する。特に何故 s という概念が有用かを示す。また、回路の安定性についても言及する。

[HTML ファイル] [PDF ファイル] [回路理論の掲示板]

[岡部の Web に公開の文書] [岡部のトップページ]

電子回路の章は次のところににあります。

[電子回路の HTML ファイル] [電子回路の PDF ファイル]

目 次

まえがき

電気回路 (electric circuits) の周波数特性を議論するときに、抵抗 R の概念を拡張し、$j\omega L$ とか $1/j\omega C$ といった**インピーダンス** (impedance) という概念を利用する。この際、$\exp(j\omega t)$ といった時変信号を仮定する。さらに、$j\omega$ を拡張した概念として s なる複素数を利用する。こうした概念が回路理論を大きく発展させてきたが、その概念は厳密には**ラプラス変換** (Laplace conversion) を利用して説明されることが多く、必ずしもわかりやすいものではない。ここでは、微分方程式から、これらの概念の説明を試みる。

第1章　回路の微分方程式

1.1　線形微分方程式

工学では、よく**線形システム** (linear system) を議論する。実際、対象として線形システムが多いこともあるし、非線形システムには一般的に適用できる理論がないこともあって線形システムを近似にして議論することが多いといった背景がある。LCR で構成される回路や、多くの代表的な力学の運動は線形システムになっており、定数係数をもつ微分方程式で表現される。

線形システムとは微分方程式が与えられた場合に、その解の定数倍も解になること、いくつかの解がある場合には、その和も解になるようなシステムである。定数倍したものの和を線形結合と呼ぶ。こうした線形システムの微分方程式は変数の多階の時間微分を線形結合した形になっている。

$$a_0\frac{d^ny(t)}{dt^n}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_ny(t)=b_0\frac{d^mx(t)}{dt^m}+\cdots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+a_mx(t) \tag{1.1}$$

この式で $x(t)$ は入力であり、$y(t)$ は出力である。この形の微分方程式は、定数係数をもつ**線形微分方程式** (linear differential equation) と呼ばれる。例えば、外力 $x(t)$ が加わっているときの振り子の位置 $y(t)$ は、振り幅が余り大きくないときには次式で与えらえることが知られている。

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\mu\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=x(t) \tag{1.2}$$

1.2　同次微分方程式の一般解 (過渡解)

運動や回路を解析するとは、これらの方程式の解を求めることである。若干やっかいなのは、入力 $x(t)$ がなくても、解が存在することである。まず、式 1.1 の右辺を 0 とした**同次方程式** (homogeneous equation) を考えよう。なお、右辺 0 でないときには**非同次方程式** (inhomogeneous equation) と呼ばれる。

$$a_0\frac{d^ny(t)}{dt^n}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_ny(t)=0 \tag{1.3}$$

この方程式を解くときには、$\exp(st)$ といった試行解を使うと、簡単に解けることが知られている。数学の世界では、s の代わりに λ がよく使われるが、ここでは回路理論でよく使われる s を使おう。このような解が何故、線形微分方程式の解となるかは、方程式の時不変性によっているのであるが、ここでは詳細の説明を省く。ともかくも、この形の解は便利がよいのである。

つまり、$y(t)=y\exp(st)$ と置くのである。そうすると、$\exp(st)$ の時間微分は $s\exp(st)$、二階微分は $s^2\exp(st)$ などとなることがわかっているので、式 1.3 は、簡単に、次のように変形できる。

$$(a_0s^n+\cdots+a_{n-1}s+a_n)y=0 \tag{1.4}$$

なお、すべての項に共通に、$\exp(st)$ が現われるので、全体をそれで除してある。常には 0 でない解を求めたいので、y につく係数が 0 となる。

$$a_0s^n+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0 \tag{1.5}$$

こうしてしまうと s は微分演算子のような取り扱いの面倒なものではなく、ただの数になので、すこぶる楽になる。現に、この**決定方程式** (determinating equation) は、通常の代数方程式になるので、計算機などを利用して、根を求めることができる。これら n 個の根を $s_1, s_2, \cdots, s_n$ としよう。s がこれらのいずれかの値であると、決定方程式は 0 となることから、$y(t) = y\exp(s_i t)$ は同次方程式の解となることが理解できよう。さらに、これらの解の線形結合も同次方程式の解となることは簡単に証明できる。

$$y(t) = y_1\exp(s_1 t) + \cdots + y_n\exp(s_n t) \tag{1.6}$$

これは、同次方程式の**一般解** (general solution) と呼ばれる。全部で n 個の自由に決定できる定数が入っているので、あらゆる可能性を含んだ文字通りの一般解である。回路理論では、**過渡解** (transient solution) と呼ぶ。

1.3 微分方程式の定常解

続いて、非同次方程式の解を求めよう。$x(t)$ は色々な時間変化の可能性があるが、この方にも指数関数的な形を仮定しよう。つまり、$x(t) = x\exp(st)$、と置くのである。もっと一般の $x(t)$ の可能性もあるが、それは**フーリエ展開** (Fourier series) などを利用して、この形に分解できるので、とりあえず、この形から始めよう。そうすると、$y(t)$ にも $\exp(st)$ で変化する解が現われそうである。そこで $y(t) = y\exp(s)$ と置いてみる。すると式 1.1 の非同次方程式は、簡単に、次のように変形できる。

$$(a_0 s^n + \cdots + a_{n-1}s + a_n)y = (b_0 s^m + \cdots + b_{m-1}s + a_m)x \tag{1.7}$$

なお、両辺に共通な $\exp(st)$ が現われるので、それで除してある。再び s はただの数なので、左辺の多項式で両辺を除すことも許され、直ちに、次のようか解が予想できる。

$$y = \frac{b_0 s^m + \cdots + b_{m-1}s + a_m}{a_0 s^n + \cdots + a_{n-1}s + a_n}x \tag{1.8}$$

これは、非同次方程式の**特解** (particular solution) と呼ばれる。回路理論では**定常解** (stationary solution) と呼ぶ。このように y は x に s の**有理関数** (rational function) を掛けることで得られる。有理関数とは多項式の比である。この有利関数は、出力を入力に結び付けることから、**伝達関数** (transfer function) と呼ばれる。

元の微分方程式である非同次方程式の一般解は、この定常解と同次方程式の過渡解を加えたものになることが、簡単に示しうる。

$$y(t) = y_1\exp(s_1 t) + \cdots + y_n\exp(s_n t) + \frac{b_0 s^m + \cdots + b_{m-1}s + a_m}{a_0 s^n + \cdots + a_{n-1}s + a_n}x\exp(st) \tag{1.9}$$

ここで、$s_1, \cdots, s_n$ は伝達関数の分母の**零点** (zeros)、あるいは同じことであるが、伝達関数の**極点** (poles) である。

この節のポイントは、次のようにまとめられる。

- 回路理論では $\exp(st)$ の形を仮定することにより、微分方程式の微分を、定数 s に置き換えることが可能である
- 定常解は s の有理関数である伝達関数を x に掛ければ得られる
- 過渡解は、伝達関数の分母の零点の値 s で決定される

第2章　交流理論

素子や回路の、交流に対する応答を求めるのが交流理論である。この場合、交流は $\sin(\omega t)$ や $\cos(\omega t)$ で変化しているのであるが、$\exp(j\omega t)$ で変化していると考え、その実部を観察しているという立場をとる。これにより、前節に述べた $\exp(st)$ の形に押し込むことができるのである。

2.1　交流に対する定常解

交流理論では、定常解だけを議論する。つまり、$\exp(st)$ の $s = j\omega$ の場合を考えればよい。このことから、あらゆる入出力関係は、伝達関数の $s = j\omega$ と置いたもので表現できる。

例えば、キャパシタンスに流れ込む電流を入力 $x(t)$ とし、両端の電圧を出力 $y(t)$ と考えよう。

$$y(t) = \frac{1}{C}\int dt\, x(t) \tag{2.1}$$

である。この両辺を時間で微分すると、微分方程式が得られる。

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C}\, x(t) \tag{2.2}$$

ここで、$\exp(st)$ なる解を仮定すると、この式は次のようになる。

$$sy = \frac{1}{C}\, x \tag{2.3}$$

あるいは

$$y = \frac{1}{Cs}\, x \tag{2.4}$$

つまり、**キャパシタンス** (capacitance) は $1/Cs$ の伝達関数を持つ。あるいは $s = j\omega$ として、$1/j\omega C$ の伝達関数を持つと言える。このように二端子素子の電流を入力とし、電圧を出力とする場合には、その伝達関数は特にインピーダンス (交流における抵抗) と呼び、直流回路における抵抗のように扱うことができる。

もう一つ例を上げておこう。CR の直列回路の両端に入力 $x(t)$ を与え、C の両端から出力 $y(t)$ をとる。この直列回路に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$x(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int dt\, i(t) \tag{2.5}$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int dt\, i(t) \tag{2.6}$$

まず、全体を微分し、$d/dt \to s$ とし、両辺を s で割る。つまり、$\int dt \to 1/s$ とするのと同じである。この結果、

$$x = Ri + \frac{1}{Cs}\, i \tag{2.7}$$

$$y = \frac{1}{Cs}\, i \tag{2.8}$$

が得られる。こうなると、s も定数なので、$1/Cs$ がキャパシタンスのインピーダンス特性だと思って、抵抗のように扱ってまったく問題のないことが理解できよう。i を消去することで、伝達関数が得られる。

$$y = \frac{1}{1+CRs}\,x \tag{2.9}$$

また、この回路に ω の角周波数を入れたときの、伝達量は $s = j\omega$ とすることで計算できる。

$$y = \frac{1}{1+j\omega CR}\,x \tag{2.10}$$

2.2 インピーダンスなど

このように、キャパシタンスは $1/Cs$ に、**インダクタンス** (inductance) は Ls に置き換えれば、通常の直流抵抗網と同じ理解によって、交流回路網が解析できるのである。なお、複雑な回路を二端子素子として見る場合、$s = j\omega$ として、電圧/電流を**インピーダンス** (impedance)、その実部は**レジスタンス** (resistance)、虚部は**リアクタンス** (reactance) と言う。また、電流/電圧、つまりインピーダンスの逆数に対応する概念として**アドミタンス** (admittance) があり、その実部は**コンダクタンス** (conductance)、虚部は**サセプタンス** (susceptance) と呼ぶ。

第3章　過渡応答

入力を与えたときの最初に起る応答を**過渡応答** (transient response) と呼ぶ。具体的には、同次方程式の一般解を求めることになる。

3.1　零点と極点

伝達関数の分母の零点を計算すると、過渡応答を計算することができる。回路理論では零点と極点という単語がたびたび現われるが、過渡応答に限れば、伝達関数の極点、つまり、その分母の多項式の零点が議論の対象となる。また、分母を払った形では、出力側にかかった多項式の零点が対象となる。色々覚えるのは大変であるので、伝達関数の分母の零点とのみ覚えておこう。

前節で述べた CR の例では、分母の零点は $s=-1/CR$ に発生する。したがって、過渡解は次の形となる。

$$y(t)=y_1\exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \tag{3.1}$$

これは、キャパシタンス充放電の際、定常電圧に寄っていくときに現われる波形である。

また C の例では、分母の零点は $s=0$ に発生する。$y_1\exp(0\,t)$、つまり一定値が過渡解となる。つまり、出力である電圧には、いつも一定電圧が加算されてよいことを示している。

LCR の直列回路で、電圧を入力 $x(t)$、電流を出力 $y(t)$ と考えると、次の伝達関数が定義される。

$$y=\frac{1}{Ls+R+1/Cs}\,x=\frac{Cs}{LCs^2+CRs+1}\,x \tag{3.2}$$

この伝達関数の分母の零点は、二次方程式の根であるから、LCR の組み合わせにより、二実根だったり、二重根 (実数) だったり、二共役複素根だったりする。両端を短絡、あるいは定電圧源に接続すると、それに応じ、電流波形に**減衰関数** (dumping function)、**臨界減衰関数** (critical dumping function)、**減衰振動関数** (dumped oscillation function) といった過渡解が現われる。

一般に、LCR を沢山使って、回路をいくら複雑にしていっても、二端子回路のインピーダンスやアドミタンスを表現する伝達関数の分母や分子には、正定数の多項式しか現われない。また、こうした回路の一部から出力を取り出しても、分母は必ず正定数の多項式となる。したがって、その零点の実部は、必ず 0 または負となり、増大型の解は観測できない。

しかし、能動素子が含まれていると、零点の実部が正になる可能性が生じてきて、増大解が発生する可能性がでてくる。このような回路は不安定であると言われる。

第4章　制御回路の安定性

自動制御で用いられる回路は、制御対象が目的値からどれほどずれているかによって、制御量を与え、それによって、制御対象を目的値に寄せるものである。つまり、本質的に**負帰還** (negative feedback) の概念が存在する。また、**演算増幅器** (operational amplifier) の多くは、負帰還をかけて使用する。こうした**フィードバック** (feedback) のある回路では、うっかりすると、**安定性** (stability) の欠ける回路を設計しがちである。

4.1　フィードバック回路

図 4.1 にフィードバック回路を示すが、$G(s)$ の入力は x 以外にフィードバック信号 $-H(s)y$ が加わるので、$x - H(s)y$ となる。これに $G(s)$ を掛けると y となる。式で表わすと、

$$y = G(s)\,(x - H(s)\,y) \tag{4.1}$$

これから出力 y と入力 x の関係が得られる。

$$y = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\,x \tag{4.2}$$

4.2　フィードバックの安定性

前節の分母に表われる $-G(s)H(s)$ は、フィードバックループを切ったときのループの伝達関数を与えるもので、特に $G(s)H(s)$ は一巡伝達関数と呼ばれる。一巡伝達関数を $F(s) = G(s)H(s)$ と書こう。この伝達関数の分母、$1 + F(s)$ の零点が安定性を決定することとなる。

これは次のように理解することもできる。今、$x = 0$ としよう。y に一巡伝達関数 $-F(s)$ を掛けたものは y でなければならないから、$-F(s) = 1$ が成立するような s を求めると、$exp(st)$ の形の解が存在することになる。この s の実部が非正であれば回路は安定と言える。

しあがってフィードバック回路の安定性は

$$1 + F(s) = A\,\frac{(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n)}{(s - s'_1)(s - s'_2)\cdots(s - s'_d)} \tag{4.3}$$

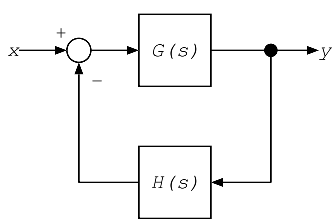

図 4.1: フィードバック回路

として、この式の零点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ がすべて左半平面にあればよい。

4.3　ナイキストの判定法

前節の安定性判定の式で、$s = j\omega$ とし、ω を $-\infty$ から ∞ まで変えたときの $\arg(1 + F(j\omega))$ の変化を調べてみる。

$$\arg(1+F(j\omega))|_{-\infty}^{\infty} = \arg A + \arg(j\omega - s_1) + \cdots + \arg(j\omega - s_n) - \arg(j\omega - s_1') - \cdots - \arg(j\omega - s_d')|_{-\infty}^{\infty} \tag{4.4}$$

もし、s_1 が左半平面にあれば、arg は π 増加し、右半平面にあれば π 減少する。したがって、上記の結果は、

$$\arg(1 + F(j\infty)) - \arg(1 + F(-j\infty)) = \pi(n_l - n_r - d_l + d_r) \tag{4.5}$$

となる。ここで、n_l は分子で左半平面にある根の数、n_r は右半平面にある根の数、d_l、d_r は分母で左右に存在する根の数である。一方左辺は $1 + F(s)$ 面で $\arg(1 + F(j\omega))$ が反時計方向に何回回ったかの 2π 倍である。この時計周りの回転数を N とすると、$-2\pi N$ である。

一方、実在の回路では、$s \to \infty$ で増幅率が低下し、$F(s) \to 0$ が成立するが、この結果、$1+F(s) \to 1$ となる。つまり、$1 + F(s)$ の上下の次数は等しい。このことから $n_l + n_r = d_l + d_r$ が成立する。そこで右辺は $2\pi(d_r - n_r)$ となる。最終的に

$$n_r = N + d_r \tag{4.6}$$

が得られる。安定のためには、この値が 0 である必要がある。実用の回路では、分母に不安定零点を持つことは滅多にないので、$d_r = 0$ として、$1 + F(j\omega)$ が原点を時計周りに回ると不安定、あるいは「$F(j\omega)$ が -1 を時計周りに回ると不安定」という結論が得られる。これが**ナイキストの判定法** (Nyquist criteria) である。

なお、ナイキストの判定法は、s 平面の現象を $F(s)$ 平面に変換したもので理解することも可能である。不安定なシステムでは、s 面で右半平面に零点が存在することになる。したがって s 平面で、虚数軸上を下から上へ移動した際、進行方向右に零点があることになる。s 平面の虚数軸は $F(s)$ 平面では $F(j\omega)$ なる曲線に変換され $-\infty$ から ∞ の移動は、この曲線を時計回りに回ることに対応する。零点は -1 に変換される。そこで、$F(j\omega)$ が -1 を時計周りに回ると不安定という同じ結論になる。

4.4　ボード線図

多くの制御系のフィードバック回路の一巡伝達関数は、直流でほぼ一定の高い利得を持ち、周波数が上がるにつれて利得が下る形のものが多い。このような場合には、$\log \omega$ を横軸に、$\log |F(j\omega)|$ と $\arg F(j\omega)$ を縦軸に描いた**ボード線図** (Bode diagram) により、ナイキストの判定法を言い替えることができる。-1 の点が「振幅 1、位相 $-\pi$」であることに着目すると「増幅率が 1 に達したときに、位相が $-\pi$ 以上 (より正側) ならば安定」あるいは「位相が $-\pi$ に達したときに、増幅率が 1 以下ならば安定」ということになる。

増幅率が 1 のときに位相がどのくらい $-\pi$ の正側にいるかを表わす位相差を位相余裕、また位相が $-\pi$ になったときに利得が 1 よりどのくらい低いかを dB で示したものを利得余裕と呼び、共に大きい程が安定である。

索 引