

非ユークリッド幾何学
—球面幾何学と双曲幾何学—

放送大学/東京大学 名誉教授 岡部 洋一

2021年10月26日
起草: 2020年6月22日

All Rights Reserved (c) Yoichi OKABE 2020-present.

個人の使用以外のコピーを禁じます。また、再コピーおよび再配布は禁止します。ただし、教育目的に限り、再コピー、再配布は原著者を明示するという条件でのみ許諾します。

まえがき

著者は工学者であり、数学者ではない。どちらかという物理寄りである。自身のかつての研究分野が電磁波だったため、電磁気学、相対性理論と興味が広がった、特殊相対性理論は時空がミンコフスキー空間という双曲幾何学が成立する非ユークリッド幾何学の上で議論される。また、一般相対性理論ではそれぞれ各点で異なるミンコフスキー空間が出現する。

さらに、自分の趣味として山登りを行なうが、かつての登山には地図が不可欠であり、その立場から地球表面に成立する球面幾何学にも関心があった。

これらについてはそれなりに理解していたが、たまたま、現在所属している放送大学で「非ユークリッド幾何と時空」という講義があり、球面幾何学と双曲幾何学をきちんと学ぶことができた。この講義は球面幾何学の諸定理は比較的理解のしやすい古典的幾何学を用いて証明され、一方、双曲幾何学についてはベクトル表現を多用している。私個人はこれら二つの幾何学が対等に同じ形で説明される方がすっきりすると思い、対照的にメモを作成してみた。本書はそれを纏め直したものである。また、数学書としては、もっと数学記号を使い定理とその証明のセットという形の記述をすべきであろうが、比較的、身近な用語を用いて、入門書的に記載した。元より、両幾何学とも長い伝統があり、私個人のオリジナリティは全くないが、二つの幾何学をほとんど同じ形式で論じているところが最大の特徴であろう。

なお、この書では球面幾何学および双曲幾何学、さらにそれらの自然な極限としての平面幾何学についてのみ説明し、物理である「特殊および一般相対性理論」は別の書としてまとめているので、そちらを参照してほしい。

著者

目次

第 1 章	ユークリッド幾何学	1
1.1	ユークリッド幾何学の公理	1
1.2	平行の公理	2
第 2 章	平面三角法	4
2.1	加法定理	4
2.2	平面三角形とピタゴラスの定理	4
2.3	平面余弦定理	5
2.4	平面正弦定理	5
2.5	球面三角形の内角の和と面積	5
第 3 章	球面幾何学	6
3.1	E 内積と球面直線	6
3.2	接線ベクトル	8
3.3	球面線分の長さ	10
3.4	球面直線間の角度	10
3.5	球面三角形と球面余弦定理	11
3.6	球面ピタゴラスの定理	12
3.7	球面三角形の内角の和と面積	13
3.8	球面正弦定理	14
3.9	双対三角形	15
3.10	E 外積	16
第 4 章	球面の射影と地図	18
4.1	射影の種類	18

4.2	中心射影	19
4.3	立体射影	19
第 5 章	双曲幾何学	22
5.1	双曲面と双曲距離	22
5.2	M 内積と双曲直線	24
5.3	接線ベクトル	27
5.4	双曲線分の長さ	28
5.5	双曲直線間の角度	29
5.6	双曲三角形と双曲余弦定理	30
5.7	双曲ピタゴラスの定理	31
5.8	双曲三角形の内角の和と面積	32
5.9	双曲正弦定理	33
5.10	双対三角形	34
5.11	M 外積	35
第 6 章	双曲面の射影とクライン円板	37
6.1	中心射影とクライン円板	37
6.2	双曲直線の射影	38
6.3	クライン円板での M 距離	38
6.4	双対直線およびその双対点へのクライン円板上の射影	39
6.5	直角五角形	40
6.6	直角六角形	41
第 7 章	双曲面の射影とポアンカレ円板	43
7.1	立体射影とポアンカレ円板	43
7.2	双曲直線のポアンカレ円板への射影	43
7.3	クライン円板とポアンカレ円板	45
7.4	立体射影の等角性	46
7.5	M 長さの計測	47
7.6	半球面モデル	47
7.7	半平面モデル	48
第 8 章	平面幾何学との関係	49

8.1	平面直線	49
8.2	接線ベクトル	50
8.3	平面線分の長さ	51
8.4	平面直線間の角度	51
8.5	平面三角形と平面余弦定理	52
8.6	平面ピタゴラスの定理	53
8.7	平面三角形の内角の和と面積	53
8.8	平面正弦定理	54
8.9	双対三角形	54
第 9 章	座標変換	56
9.1	計量, 内積, 計量テンソル	56
9.2	球面幾何学における座標変換	56
第 10 章	相対論と双曲幾何学	59
10.1	相対論における座標変換	59

目次

3.1	球面三角形の面積 S は三枚の半月形のピールが重なっている	14
4.1	立体射影における等角性	20
5.1	$z > 0$ の二葉双曲面 \mathbb{H} , 光円錐, 一葉双曲面 \mathbb{H}^+	23
5.2	M 直交する二つのベクトルは 45° の直線に対称の位置になる	24
5.3	\mathbf{r} に対応する接線ベクトル \mathbf{t}	26
5.4	大きな三角形は小さな三角形に分割できる	33
6.1	クライン円板 \mathbb{K} 平面 π 内の ℓ の像 $P(\ell)$ と、これと双対な点 L^* およびその像 横軸は、平面 π を真横から見るように選んでおり、像 $P(\ell)$ は点になる	37
6.2	クライン円板上の像 $P(\ell)$ と像 $P(L^*)$ の上面図	39
6.3	直角五角形のクライン像	40
6.4	直角六角形のクライン像	42
7.1	ポアンカレ円板 \mathbb{D} \mathbf{r} の像 $P(\mathbf{r})$ と、 \mathbf{v} のクライン像 V とそれを z 方向に下した $P(\mathbf{v} + \mathbf{v}_S)$ ($P(\ell)$ の中心) 横軸は、双曲直線を含む平面を真横から見るように選んでいる	44
7.2	双曲直線 ℓ を含む平面 π のクライン円板での像 L と、 \mathbf{v} の像 V 、および これらを上から見た図 横軸は、平面 π を真横から見るように選んでいる	45
7.3	二本の双曲直線 ℓ の像の間の角度はポアンカレ円板上でも等しい	46

7.4 無限遠点を含む直角三角形から M 長さを知ることができる 47

第 1 章

ユークリッド幾何学

ユークリッド幾何学 (Euclidian geometry) とは古代エジプトのギリシア系哲学者であるエウクレイデス (Eukleides (Eng.)Euclid) (およびその一派) により体系化された幾何学であり, 点, 線, 面といった無定義の概念を組み合わせた少数の公理の基に, 多くの定理を証明するという現在の数学の論法に通じる幾何学の体系である, 無限に広がる平面上に描かれたどこまでも伸延可能な直線, またどこまでも間隔の変ることのない平行線などを前提とした最も常識的な空間上の幾何学である. これ以外の非ユークリッド幾何学 (non Euclidian geometry) が存在し得るのが定着してきたのは 19 世紀になってからである.

1.1 ユークリッド幾何学の公理

エウクレイデス派の樹立したユークリッド幾何学は, 定理と証明, こうして得られた定理を組み合わせ, さらに定理と証明といった論証を繰り返すことで作られた体系であり, 現在の数学の議論の基礎となっている. この論法を逆に辿っていくと, いくつかの極めて基礎的なそれ以上証明のできない要素とその関係の記述に行き着く.

点, 線, 面といった幾何学の基本要素は, これを説明したり証明したりしないで利用する無定義語 (undefined terms) である. また点と線の関係, 例えば 2 点間を結ぶ直線が存在するといった無定義語の関係を記述したものは公理 (axiom) と言い, これもこれ以上証明を試みるこののない前提条件である. 無数に存在する定理 (theorem) は, 公理を組み合わせることで証明 (proof) することが可能であり, この定理の上にさらに定理ができていく.

ユークリッド幾何学はユークリッドの基々の公理をその後, ヒルベルト (Hilbert) が整備し, およそ 20 個の公理を基に構築されている. およそとしたのは, 参考とする書に

よって若干の差があるからである。その詳細は省くが、点と線の関係、点と線の関係など、**結合の公理** (incidence axiom) と呼ばれるものがおよそ 10 個、線上の点の順序など、順序関係を定めた**順序の公理** (order axiom) と呼ばれるものがおよそ 5 個、線分や角度の合同を定義した**合同の公理** (congruence axiom) がおよそ 5 個、平行の意味を定めた**平行線の公理** (parallel axiom) が 1 個、線を構成する点の連続性に関する**連続の公理** (continuity axiom) が 2 個である。

例えば、結合の公理の 1 番は「任意の相異なる 2 点 A, B に対し、 A, B と結合する直線が存在する。」など、ほとんどが常識的なものである。ただし、幾何学を面白くする個人の名前の付いた 3 個の公理だけ、紹介しておこう。

順序の公理の大部分は、直線上の 3 点の「 A, B の間に C がある」という定義をきちんと述べたものであるが、**パッシュェの公理** (axiom of Pasche) はこれらとは異なり、「同一直線上にない 3 点 A, B, C と結合する平面 ABC があり、この平面上にあってこれらの点を通らない直線 l に対し、 l が線分 AB の内点を通るならば、直線 l は線分 BC の内点を通るか、または線分 CA の内点を通る。」というものである。これ以外の順序の公理は、「もし間の点があれば」という前提であったが、この公理により、「間にある点」を作り出す方法が得られるのである。

また平行線の公理は**プレイフェアの公理** (axiom of Playfair) と呼ばれ、「任意の直線 l と、直線 l 上にない任意の点 A に対して、直線 l と点 A によって決まる平面上にあり、点 A を通り直線 l と交わらない直線がただ一つ存在する。」と言うものである。これについては次節で述べる。

連続の公理の一つは**アルキメデスの公理** (axiom of Archimedes) と呼ばれ、「任意の線分 AB について、 AB 上に有限個の点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ が存在して、線分 $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ のそれぞれが互いに合同である時、 B が A と A_n の間にあるようにすることができる。」と言うものである。この公理の意味はわかり辛いですが、この直線を数直線とし、点 A が原点であり、 $x=AB$, $\delta=AA_1$ とすると、どんなに小さな δ に対しても、十分大きな n により $n\delta > x$ とできることを示している。これは、無限大や無限小といった概念に繋がり、最終的には有理数や実数の定義にも関係する重要な概念である。実は連続の公理のもう一つは、すべての点がこうした A_i により尽されると言っており、正にすべての数を網羅できることを示している。

1.2 平行の公理

これらの公理のうち、得に平行の公理についてはいくつかの他の表現がある。

- 2本の直線に1本の直線が交叉している時、錯角が等しければ、2本の直線は平行である。
- 三角形の内角の和は 2π である。
- すべての角度が直角の四角形が存在する。
- 互いの距離が常に変わらない直線の組が存在する。
- 直角三角形において斜辺の平方は他の辺の平方の和に等しい（ピタゴラスの定理）。

これ以外にも三角形や四角形を用いた表現が数多く存在しているが、いずれも相互に誘導可能である。

地球のような大きな球面上では、議論をしている近傍では平行という概念は一見成立するが、本当に遠方まで伸ばすと、あらゆる平行線と信じていたものすらいずれは交叉するということが知られるようになってきた。つまり平行線が一本も引けないという事態である。

さらに、球面に描かれた三角形の内角の和が 180° 以上になることも知られてきた。ここに至って、平行の公理は必ずしも成立しなくても、新しい幾何学が構築できるのではないかという考えが勃興してきた。これが非ユークリッド幾何学と呼ばれる分野の成立である。この球面上の幾何学が本書の前半で述べる球面幾何学である。

逆に、平行線が何本も引け、かつ三角形の内角の和が 180° 以下になる双曲面上の幾何学も構築された。それが本書の後半で述べる双曲幾何学である。

現在では、ある方向には球面幾何学的であり、他の方向には双曲幾何学的であるなど、複雑な非ユークリッド幾何学を扱うリーマン幾何学という手法も開発されている。このリーマン幾何学は、アインシュタインが樹立した相対性理論で多用され、物理の世界、天文の世界では既に欠くべからざる数学的ツールの一つになっている。

第2章

平面三角法

2.1 加法定理

まず三角法加法定理 (trigonometric addition formula) を示しておこう。

$$\begin{aligned}\sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t), \\ \cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t).\end{aligned}$$

2.2 平面三角形とピタゴラスの定理

平面三角形 (planar triangle) について成立する平面三角法 (planar trigonometry) について説明する。平面三角形の頂点を A, B, C 、各頂点における角度を A, B, C 、対する弧の長さを a, b, c とする。まず、 $C = \angle C$ を直角とする直角三角形に対し、平面ピタゴラスの定理 (planar Pythagorean theorem) と呼ばれる式が成立する。

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2.1}$$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}. \tag{2.2}$$

$$\cos A = \sin B, \quad \cos B = \sin A. \tag{2.3}$$

ピタゴラスの定理 (Pythagorean theorem) と言えば (2.1) だけであり、(2.2) は \sin の定義、(2.3) は \cos の定義といってもよい式であるが、後述の双曲面三角法ではすべての交角が直角になる直角五角形が存在し、それに対するこれらの式がすべて同じになるため、まとめて示したものである。

2.3 平面余弦定理

任意の平面三角形 ABC に対し、**平面余弦定理** (planar cosine theorem) が成立する。

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ より、三角不等式 $c < a + b$ が導出される。

2.4 平面正弦定理

以下の**平面正弦定理** (planar sine theorem) が成立する。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

2.5 球面三角形の内角の和と面積

平面三角形の内角の和 $A + B + C = \pi$

平面三角形の面積 $S = ab \sin(C)/2$ に平面余弦定理を代入すると、次の**ヘロンの公式** (Heron's formula) が導出できる。

$$S = \frac{1}{2} ab \sin(C) = \frac{ab}{2} \sqrt{1 - \cos^2(C)} = \frac{ab}{2} \sqrt{(1 + \cos(C))(1 - \cos(C))}$$
$$= \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4}} = \sqrt{\frac{(a + b)^2 - c^2}{4} \frac{c^2 - (a - b)^2}{4}}$$
$$= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

ただし、 $s = (a + b + c)/2$ 。証明終了。

第 3 章

球面幾何学

地球の上に住んでいる人間が感じる幾何学のように、直線だと思っていたのが実は大きな球の大円だったり、大円の $1/4$ 弧ずつ進んで右へ直角に曲がっていくと、平面ならば 4 コーナー目で元の位置に戻るのが、3 コーナー目で戻ってしまうなど、色々不思議なことが生じる。こうした球面上の幾何学を**球面幾何学** (spherical geometry) という。**球面 (形)** (spherical (adj.)) は多出するため「S」と省略することとする。同様に、**ユークリッド (形)** (Euclidean (adj.)) も「E」と省略することとする。

3.1 E 内積と球面直線

球の原点を通る任意の平面と球面の交線は大円となるが、これが球面幾何学における**球面直線** (spherical line) である。いずれ判明するが、球面では平行線が一本も引けない。つまり、代表的な非ユークリッド幾何学である。

球面幾何学の土台を、次の式に従う原点に中心を持つ半径 1 の球面 S とする。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

任意の二つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し、次に示す E 内積 (E inner product) を導入する。 E 計量 (E metric) ともいう。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(s).$$

二番目の等号の証明は後述するが、 s は二つのベクトルの間の E 角度 (E angle) である。 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ などはベクトルの E 長さ (E length) を表し、 E ノルム (E norm) と呼ばれる。長さが 0 でない二つのベクトルの内積が 0 の時は、 $\cos(s) = 0$ つまり、両ベクトル

が E 直交 (E orthogonal, E right-angled) する時である. この E 内積で距離の定義される空間を一般に E 空間 (E space) とよぶ.

二つのベクトルが点 A, B を指す位置ベクトルの場合, $\|r_A - r_B\|$ は二点間を結ぶ直線の長さ, つまり E 距離 (E distance) を表す. これは球面幾何学における球面に沿った長さではない.

原点を通る任意の平面と球面の交線を, **球面直線** (spherical line) とする. つまり大円である. この交線は \mathbb{R}^3 空間で見ると円であるが, 球面に拘束された人から見ると, 二点を結ぶ最短距離 (証明は省く) となっている.

球面 \mathbb{S} を考える. 今, 二つのベクトル w, u をうまく選んで, 平面 $r = Zw + Xu$ と球面の交線が $Z^2 + X^2 = 1$ と表現される条件を求めよう. ここで Z, X としたのは双曲幾何学との対応を取り易くするためであり, 球面幾何では, X, Y, Z は対等であるため, どの座標を選択しようがまったく問題ない. 球面は $r \cdot r = 1$ で表わされるので, これに代入すると,

$$\begin{aligned} r \cdot r &= (Zw + Xu) \cdot (Zw + Xu) \\ &= Z^2 w \cdot w + ZX(w \cdot u + u \cdot w) + X^2 u \cdot u \quad (= 1). \end{aligned}$$

したがって, 次式が成立する必要がある ($u \cdot w = w \cdot u$ に注意).

$$w \cdot w = 1, \quad w \cdot u = 0, \quad u \cdot u = 1.$$

これは $w, u \in \mathbb{S}$ であり, かつ互いに直交していることを示す. つまり, w, u は正規直交系 (長さが 1 で互いに直交する) の単位ベクトルであるともいえる. これらを球面直線 (大円) 上の点を表現するときの S 基底 (S base) とよぼう. 三次元空間の S 基底は後に述べるように, もう一つある (第三の基 v) が, 球面直線を表現する際は, 二つでも可能であるのでこの節では二つについて議論する.

$Z^2 + X^2 = 1$ であるので, しばしば $Z = \cos(s), X = \sin(s)$ と記載し, 大円の満す方程式を次のように記載する.

$$r = \cos(s)w + \sin(s)u. \quad (3.1)$$

つまり, 球面幾何学における球面直線が, この式で s を動かすことにより得られる.

(3.1) を見ると, w は球面直線で原点に一番近い所を指す位置ベクトルで, u はそれと直交する xy 平面内のベクトルでなければならないように感じるかも知れないが, それは誤解である. $r \cdot r = 1$ からわかるように, 球面の上の点はいずれも原点から等距離にある

ので、同じ球面直線のどの点であってもまったく問題ない。実際、同一平面内にある新たな次のような基を考えてみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' &= \cos(s') \mathbf{w} + \sin(s') \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}' &= -\sin(s') \mathbf{w} + \cos(s') \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

これが基底であることは、 $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' = 1$, $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}' = 0$, $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' = 1$ となることから直ちに理解できる。(3.2) から逆に元の基底を、新しい基底で表現してみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \cos(s') \mathbf{w}' - \sin(s') \mathbf{u}', \\ \mathbf{u} &= \sin(s') \mathbf{w}' + \cos(s') \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

これを (3.1) に代入すると、新しい基底で記述された \mathbf{r} の表現が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \cos(s) (\cos(s') \mathbf{w}' - \sin(s') \mathbf{u}') + \sin(s) (\sin(s') \mathbf{w}' + \cos(s') \mathbf{u}') \\ &= \cos(s - s') \mathbf{w}' + \sin(s - s') \mathbf{u}'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

つまり、 $s \rightarrow (s - s')$ とすれば、新しい基底 \mathbf{w}' , \mathbf{u}' が使えるのである。

単位長の二つのベクトルのユークリッド内積を計算してみると、 $\Delta s = s_B - s_A$ として、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B &= (\cos(s_A) \mathbf{w} + \sin(s_A) \mathbf{u}) \cdot (\cos(s_B) \mathbf{w} + \sin(s_B) \mathbf{u}) \\ &= \cos(s_B) \cos(s_A) + \sin(s_B) \sin(s_A) = \cos(\Delta s). \end{aligned}$$

3.2 接線ベクトル

$\mathbf{r} = \cos(s) \mathbf{w} + \sin(s) \mathbf{u}$ とし、 $s \rightarrow s + ds$ としてみよう。この時、 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ として、 $d\mathbf{r}$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \cos(s + ds) \mathbf{w} + \sin(s + ds) \mathbf{u} - (\cos(s) \mathbf{w} + \sin(s) \mathbf{u}) \\ &= (\cos(s) \cos(ds) + \sin(s) \sin(ds)) \mathbf{w} + (\sin(s) \cos(ds) - \cos(s) \sin(ds)) \mathbf{u} \\ &\quad - \cos(s) \mathbf{w} - \sin(s) \mathbf{u} = (\sin(s) \mathbf{w} - \cos(s) \mathbf{u}) ds \quad (= \mathbf{t} ds). \end{aligned}$$

この右辺を $\mathbf{t} ds$ と定義しよう。つまり、 s を増加すると移動していく方向であるので、 $\mathbf{t} ds$ は球面直線の接線の方を向くベクトルである。 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ が成立するので、次式で定義される \mathbf{t} は球面直線の接線ベクトル (tangent vector) である。

$$\mathbf{t} = \pm(\sin(s) \mathbf{w} - \cos(s) \mathbf{u})$$

接線の方向は二方向あるので \pm を付した (特に断わらない場合は, 正号, つまり s の増加につれ \mathbf{r} が動いていく方向). 接線ベクトルは, これから球面三角形のいくつかの定理を証明する際に, 積極的に利用される重要な概念である. なお, $\mathbf{w} = \mathbf{r}$ とすれば, $\mathbf{u} = \mathbf{t}$ である.

さて, $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ の接線ベクトルを $\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B &= (\sin(s_A) \mathbf{w} - \cos(s_A) \mathbf{u}) \cdot (\sin(s_B) \mathbf{w} + \cos(s_B) \mathbf{u}) \\ &= \sin(s_B) \sin(s_A) + \cos(s_B) \cos(s_A) = \cos(\Delta s) = \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B.\end{aligned}$$

である. 平面幾何学であると, 同じ直線に乗っていれば接線ベクトルは常に等しいが, 非ユークリッド空間では, ここにあるように, その保証はない. A, B 二点の接線の向きを互いに対向するように $\mathbf{t}_{AB}, \mathbf{t}_{BA}$ のように選択すれば,

$$\mathbf{t}_{AB} \cdot \mathbf{t}_{BA} = -\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B.$$

さて, $A, B \in \mathbb{S}$ とし, これら二点と原点を含む平面を考える. これら二つの座標ベクトルは, 共通の基底 \mathbf{w}, \mathbf{u} を用いて次のように記述することができる.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_A &= \cos(s_A) \mathbf{w} + \sin(s_A) \mathbf{u}, \\ \mathbf{r}_B &= \cos(s_B) \mathbf{w} + \sin(s_B) \mathbf{u}.\end{aligned}$$

これを \mathbf{w}', \mathbf{u}' を基底に替えると, (3.3) より, すべての \sin や \cos の引数が s' だけ減ることは明かであろう. したがって, $s_B - s_A$ は基底の取り方に依存せずに維持されることがわかる. つまり, \mathbf{w}, \mathbf{u} の選択には大きな自由度があることが理解できよう.

\mathbf{w} の具体的な候補の一つは次のようにして得られる. まず, xy 平面と $x = 0$ で交叉し, z 軸から θ 傾むいている平面 $x = \alpha z$ を考えよう. $\alpha = \tan(\theta)$ である. これと, 球面との交線を求めるには次式に代入すればよい.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

その結果, $\beta^2 = 1/(1 + \alpha^2)$ として, 次式が得られる.

$$\frac{z^2}{\beta^2} + y^2 = 1.$$

これを $\cos^2(s) + \sin^2(s) = 1$ と比較すると, $z = \beta \cos(s), y = \sin(s)$ とすれば, パラメータ s で置き換えることができる.

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha\beta \cos(s), \\ y &= \sin(s), \\ z &= \beta \cos(s). \end{aligned} \right\}$$

さらに、 z 軸の周りに ϕ 回転すると、 s をパラメータとした球面直線の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha\beta \cos(s) \cos(\phi) - \sin(s) \sin(\phi), \\ y &= \alpha\beta \cos(s) \sin(\phi) + \sin(s) \cos(\phi), \\ z &= \beta \cos(s). \end{aligned} \right\}$$

適当に選ばれた α, β, s に対し $\mathbf{w} = (x, y, z)$ となり、 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 1$ が確認できる。さらに、前述のように、もう一つの基底は $\mathbf{u} = d\mathbf{w}/ds$ で得られる。

3.3 球面線分の長さ

$s_B - s_A$ が基底の選択によらず維持されることから $s_B - s_A$ は A と B の間の球面直線、つまり**球面線分** (spherical line segment) の長さとの強い関係を持っていることが予想される。実際、長さは (3.1) を利用して、次のようにして計算できる。

$$\int_A^B ds \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \int_A^B ds |\cos(s) \mathbf{w} + \sin(s) \mathbf{u}| = \int_A^B ds = |s_B - s_A|.$$

つまり球面線分の長さは $|s_B - s_A|$ である。これは二点間の E 距離ではなく、球面に沿って測った **S 長さ** (S length) である。

3.4 球面直線間の角度

球面 S 内の同じ点を起点とする二つの球面線分間の角度を考えよう。例えば点 A から点 B, C に引かれた二つの線分を AB, AC とする時、それぞれの接線 t_{AB} および t_{AC} の間の角度を対象としよう。これら接線ベクトルは A と E 直交してるので、原点に移動すればいずれも S 上の点を指す。

こうしたベクトルを対象にして議論を続ける。今、 S 上の点を指す座標ベクトル \mathbf{q} を考え、二つのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} をうまく選んで、 $\mathbf{q} = X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}$ と記載 (なお、一つのベクトルならば、 \mathbf{w}, \mathbf{u} でも記載できる) し、 X, Y を変化させて得られる平面と球面 S の交線が $X^2 + Y^2 = 1$ と表現される条件を求めよう。球面は $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$ で表わされるので、これに代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} &= (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}) \cdot (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}) \\ &= X^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + XY(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + Y^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (= 1). \end{aligned}$$

したがって、次式が成立する必要がある ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ に注意).

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1.$$

これは $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$ であり、かつ互いに直交していることを示す. つまり, \mathbf{u}, \mathbf{v} は正規直交系 (長さが 1 で互いに直交する) の単位ベクトルであるともいえる.

したがって, $X = \cos(s), Y = \sin(s)$ と記載し, \mathbb{H}_1 内の球面直線の満す方程式を次のように記載することができる.

$$\mathbf{q} = \cos(s)\mathbf{u} + \sin(s)\mathbf{v}.$$

球面 \mathbb{S} 上の 2 球面直線 AB, AC のなす S 角度 (S angle) は, それぞれの点 A における接線 \mathbf{t}_{AB} と \mathbf{t}_{AC} (共に \mathbb{S} のベクトル) の双方を通過する球面直線 $\mathbf{q} = \cos(s)\mathbf{u} + \sin(s)\mathbf{v}$ を用い, その間の角度 $|s_c - s_b|$ とすればよい.

\mathbf{w} の候補としては \mathbb{S} 上の任意の点を指すベクトルを採用した. \mathbf{u} にはその点を起点とする任意方向の接線ベクトル \mathbf{t} がよいだろう. また, \mathbf{v} の候補としてはこの二つのベクトルと直交する別の接線ベクトルがよいだろう. 外積の概念があれば, $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{t}$ のことである.

このように, 球面幾何学は互いに直交する, \mathbb{S} 内の $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ の合せて三つの単位ベクトルにより議論することができる. \mathbf{w} は球面上の任意の点を通過する原点を通過する単位ベクトル, \mathbf{u} はこの点を通過する任意の球面直線の接線, \mathbf{v} はこの点を通過しこの球面直線と直行する別の球面直線の接線である.

3.5 球面三角形と球面余弦定理

球面上の 3 点を 3 本の球面直線で結んだものを, 球面三角形 (spherical triangle) といひ, それについて成立する球面三角法 (spherical trigonometry) について説明する. 球面上の球面三角形の頂点を A, B, C , 各頂点における角度を A, B, C , 対する辺の S 長さを a, b, c とする.

球面線分 CA, CB の点 C における接線を $\mathbf{t}_{CA}, \mathbf{t}_{CB}$ としよう. これらを原点へ移動すると, いずれも \mathbf{r}_C に直交する平面と球面の交点を指すベクトルである. その間の角度は $C = \angle C$ である. このため, $\mathbf{t}_{CA} \cdot \mathbf{t}_{CB} = \cos(C)$ となる. 一方, $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{r}_C \cos(a) + \mathbf{t}_{CA} \sin(a), \\ \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_C \cos(b) + \mathbf{t}_{CB} \sin(b). \end{aligned}$$

と書ける。したがって、

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) (\mathbf{t}_{CA} \cdot \mathbf{t}_{CB}).$$

$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B = \cos(c)$ および $\mathbf{t}_{CA} \cdot \mathbf{t}_{CB} = \cos(C)$ なので、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(C), \\ \cos(C) &= \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\sin(a) \sin(b)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

下式は上式を変形しただけである。これは**球面余弦定理** (spherical cosine theorem) とよばれる関係式である。

a, b に関する余弦関数の加法定理は以下のようなになる。

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

これと (3.4) を比較しよう。 $\cos C \leq -1$ なので、 $\cos(a+b) < \cos(c)$ 。 \cos は正引数に関し減少関数なので、 $a+b > c$ 、つまり次の**三角不等式** (triangle inequality) が成立する。

$$c < a + b.$$

3.6 球面ピタゴラスの定理

$C = \angle C$ を直角とする球面直角三角形に対し、**球面ピタゴラスの定理** (spherical Pythagorean theorem) と呼ばれる式が成立する。

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b). \tag{3.5}$$

$$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}, \quad \sin(B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)}. \tag{3.6}$$

$$\cos(A) = \cos(a) \sin(B), \quad \cos(B) = \cos(b) \sin(A). \tag{3.7}$$

(3.5) は余弦定理 (3.4) で $\angle C = \pi/2$ としただけである。

(3.6) については、球面三角形 ABC の A から AC の接線を \mathbf{t}_{AC} 、A から AB の接線を \mathbf{t}_{AB} 、C から CB の接線を \mathbf{t}_{CB} として、まず、 \mathbf{t}_{AB} を残る二つの直交する接線で表す。

$$\mathbf{t}_{AB} = \cos(A) \mathbf{t}_{AC} + \sin(A) \mathbf{t}_{CB}.$$

さらに、点 A を基準に点 C, B を表す。また、点 C を基準に点 B を表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \cos(b) \mathbf{r}_A + \sin(b) \mathbf{t}_{AC}, \\ \mathbf{r}_B &= \cos(c) \mathbf{r}_A + \sin(c) \mathbf{t}_{AB} \\ &= \cos(a) \mathbf{r}_C + \sin(a) \mathbf{t}_{CB}. \end{aligned}$$

これらより、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{t}_{CB} &= \sin(a), \\ \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{t}_{CB} &= \sin(c)(\mathbf{t}_{AB} \cdot \mathbf{t}_{CB}) = \sin(c) \sin(A). \end{aligned}$$

したがって、左式が得られる。右式も点 A と点 B の立場を入れ替えれば証明できる。

(3.7) については、

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{AB} \cdot \mathbf{t}_{AC} &= \cos(A), \\ \mathbf{t}_{AB} \cdot \mathbf{t}_{AC} &= \left(\frac{\mathbf{r}_B - \cos(c) \mathbf{r}_A}{\sin(c)} \right) \cdot \mathbf{t}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{t}_{AC}}{\sin(c)} \\ &= \frac{(\cos(a) \mathbf{r}_C + \sin(a) \mathbf{t}_{CB}) \cdot \mathbf{t}_{AC}}{\sin(c)} = \frac{\cos(a)(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{t}_{AC})}{\sin(c)} \\ &= \frac{\cos(a) \sin(b)}{\sin(c)} = \cos(a) \sin(B). \end{aligned}$$

したがって、左式が得られる。右式も $\mathbf{t}_{BA} \cdot \mathbf{t}_{BC}$ より証明できる。

3.7 球面三角形の内角の和と面積

$\angle C$ の球面直角三角形に対する球面ピタゴラスの定理の (3.7) を利用し、次の余弦加法定理の右辺を変形する。

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) = (\cos(a) \cos(b) - 1) \sin(A) \sin(B).$$

この右辺は負であるので、 $A + B > \pi/2$ となり、球面直角三角形の残る二角の和は直角より大きいことが証明される。これより、球面直角三角形を二つ合せた一般の**球面三角形内角の和** (sum of interior angles of a spherical triangle) についても、次式が成立する。

$$A + B + C > \pi.$$

球面三角形の面積 (area of a spherical triangle) は次のようにして求めることができる。任意三角形 ABC の三辺の作る大円で仕切られた球の各領域の面積を考えてみよう。

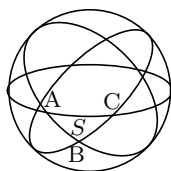


図 3.1 球面三角形の面積

S は三枚の半月形のピールが重なっている

この三つの大円で仕切られた図形を見ると，図 3.1 に見られるように，二つの隣接した三角形で構成されたピール（ナイフで切り取られた果物の皮の半月状の小片）が見えてくる．このうち， S と書かれた三角形を含む 3 枚のピール（これに薄く色を塗ってみるとよいだろう），それと全く球中心に対し対称な位置にある 3 枚のピールに着目する．ちなみに各ピールの面積は狭角に比例し， $4\pi(A/2\pi) = 2A$ などとなる（対称のピールも同じ面積）．これら 6 枚のピールで球の全表面は被覆できるが，対象となる三角形の面積 S は余計に二重に，さらにこれと対称な位置にある同面積の三角形も余計に二重に被服される．したがって $4(A + B + C) = 4\pi + 4S$ が得られる．これより，与式が導出される．

$$S = A + B + C - \pi$$

この式は 5.8 節「双曲三角形の面積」で示す別法でも誘導することができる．これを「球面三角形の面積は内角和過剰量（sum excess of inner angles）である」といっておこう．

任意の球面三角形の面積がこの式のように π からの過剰内角和で計算できるということは，種々の面積計算が平面図形に比べ圧倒的に楽である．例えば，球面 n 角形の面積は $S = \sum_{i=1}^n (\text{内角})_i - (n - 2)\pi$ となる．つまり球面 n 角形の面積も内角和過剰量であるといえる．

3.8 球面正弦定理

任意の球面三角形 ABC に対し，以下の球面正弦定理（spherical sine theorem）が成立する．

$$\frac{\sin(a)}{\sin A} = \frac{\sin(b)}{\sin B} = \frac{\sin(c)}{\sin C}.$$

これは点 C から球面線分 AB に直交する E 垂線（E perpendicular line）を下し，その足を点 D とする．球面三角形 CAD，および CBD に対し (3.6) を適用する．球面線分 CD

の長さを x とすると、

$$\sin(x) = \sin(A) \sin(b) = \sin(B) \sin(a).$$

これより最初の等号が証明できた。点 A より BC に垂線を下すことにより、次の等号も証明できる。

3.9 双対三角形

球面上の任意の点 A に対応する r_A に直交する平面は球面と交線 l_A を持つ。この点 A と曲線（球面直線） l_A の関係を互いに**双対**（dual）という。

また逆に、球面上の球面直線 l_a に対し、一葉球面上の点 a が双対となる。ただ a と書くとき、球面線分の長さとの区別がつかないので、点 A^* と書くこととする。

さて、球面上の任意の球面三角形 ABC を考え、球面線分 BC（長さ a ）と双対な点を A^* 、以下同様に B^* 、 C^* を定め、三角形 $A^*B^*C^*$ を ABC の**双対球面三角形**（dual spherical triangle）という。

双対三角形の概念は平面三角形にはない。平面三角形はそのサイズに比較し巨大な球面上の球面三角形で近似できるが、双対な三角形は非常に巨大となり、永遠の彼方に発散してしまうからである。

さて、今迄と同じ半径 1 の球面上の双対三角形について議論しよう。球面線分 A^*B^* の長さは C （ $= \angle C$ ）、 B^*C^* は A 、 C^*A^* は B に等しくなる。また、 C^* （ $= \angle C^*$ ）は球面線分 AB の長さ c に、 A^* は a に、 B^* は b に等しくなる。

双対球面三角形に成立する余弦定理を書き下すと、次式のように、元の三角形の辺の長さが頂点角に、頂点角が辺の長さに書き変わった式となる。

$$\begin{aligned} \cos(C) &= -\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \cos(c), \\ \cos(c) &= \frac{\cos(C) + \cos(A) \cos(B)}{\sin(A) \sin(B)}. \end{aligned}$$

これを**双対球面余弦定理**（dual spherical cosine theorem）という。

3.10 E 外積

本書では二つのベクトルの双方に直交するベクトルという概念をなるべく使わないようにしてきた*1が、外積という概念を使ってそれを表現することができる。球面幾何学でも外積の概念を持っているといろいろ便利なため、任意の二つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し、次に示す **E 外積** (E outer product) を導入する。ただし、紹介に止める。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_a z_b - z_a y_b) \mathbf{i} + (z_a x_b - x_a z_b) \mathbf{j} + (x_a y_b - y_a x_b) \mathbf{k}.$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。なお、自分自身との外積は常に $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ である。

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ および $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ は簡単に証明できる。このことから $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はこれら二つのベクトルの作る面の **E 法線** (E normal) であることがわかる。 \mathbf{n} の長さを正規化するために、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (y_a z_b - z_a y_b)^2 + (z_a x_b - x_a z_b)^2 + (x_a y_b - y_a x_b)^2 \\ &= (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)(x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b)^2 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

したがって、次式のように定義された \mathbf{n} は長さ 1 の法線ベクトルとなる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}}.$$

二つのベクトル $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ が球面上の点を指す座標ベクトルの場合には、この正規化定数の二乗は次式のようにになる。

$$(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_B) - (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B)^2 = 1 - \cos^2(\Delta s) = \sin^2(\Delta s).$$

ただし、 $\Delta s = s_B - s_A$ 。したがって、 $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ の正規化された法線 \mathbf{n} は次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B}{\sin(\Delta s)}.$$

またこのことから、次式が得られる。

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B = \sin(\Delta s) \mathbf{n}.$$

*1 実は双対は直交の概念そのものである。

球面直線は球面上の二つの点，例えば A, B を通るものとして定義されるとする．点 A から点 B に向う球面直線上の接線のベクトル \mathbf{t} を求めよう．

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_A.$$

元々直交している二つのベクトルの外積なので，これは正規化されている．さらに，(3.8) を利用し， $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_A = 1$ に注意して変形すると，

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_A) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_A) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_A)^2 = 1.$$

したがって \mathbf{t} も原点に移動すれば，球面を指すベクトルであることがわかる．

外積のベクトルの方向は，一般に，先のベクトルから後のベクトルの方へ捻じった際，右ネジの進む方向となる．したがって，二つのベクトルの順番を逆にすると，その外積のベクトルの向きは反転する．

第4章

球面の射影と地図

地図とは何らかの射影関数により、球面を平面に**写像** (mapping) したものである。もちろん、その目的は、球面図形の情報を運搬や保管が容易な紙などの平らな物の上に表現しようというものである。しかし、残念なことに、図形すべての情報を正確に表現することはできない。例えば図形のあちこちの角度をうまく写像すると、面積は場所により拡大したり縮小したりする。そこで、図形の何を正確に写像するかにより、各種の図法が発生する。

4.1 射影の種類

写像は数学の世界では**射影** (projection) と呼ばれる。これは広義の射影の概念である。さらに狭義の射影の概念として、ある射影中心から光を出し、球面上の点を球に当て、**像** (image) (やっかいなことに、これも日本語では射影というが、本書では単に像とした) を平面に写すことを意味する。本章ではこの狭義の射影について述べる。なお、やや拡張し、平面を任意の位置に置き、射影中心に相当する一点、球面上の点、平面上の像の点が常に同一の直線上に並ぶようにして作図したものをすべて狭義の射影とする。これにより平面を球の中心を通るように置き、射影中心と反対側にある球面の点を射影することも可能にした。

このうち代表的なものは、以下の三種類である。

中心射影 (central projection) : 地図の分野では**心射図法** (gnomonic projection) とよばれる。射影中心を球中心に置き、球面の接平面に射影する。球面直線である大円の像はすべて直線となるが、緯線のような小円の像は一般には楕円となる。このた

め大圏航空を使う空路、航路の表現に優れている。

立体射影 (stereographic projection) : 地図の分野では**平射図法** (orthomorphic projection) とよばれる。ステレオ図法ともいう。射影中心を球面上の一点に置き、それと双対な大円を含む平面に射影する。図形の角度が維持される。球面上の大円も小円も、それらの像はすべて円となる。

正射影 (orthographic projection) : 地図の分野では**正射図法** (orthographic projection) とよばれる。射影中心を無限遠に置き、それと垂直な平面に射影する。遠方から球を見た像となるが、球面直線の像も楕円となるし、角度も維持されず、地図としては使いづらい。

以下に球面幾何学にとって重要な前二者について説明する。

4.2 中心射影

中心射影では、射影中心を球中心に置き、球面の接平面に射影する。したがって、半球だけで無限大の像になってしまう。残る半球の像が欲しい場合には、もう一枚の接平面が必要となる。

球面直線とは、大円で表現できる。この大円を含む平面は射影面である平面と直線で交わる。つまり、球面直線の像は直線となる。

次に球面上の小円を考えよう。射影中心から小円の中心を通る射影線に着目すると、小円はこの線に垂直な面に存在し、この軸からの距離が等しい円である。したがって、小円を通過する射影線は、円錐形を構成する。円錐の頂点は射影中心の位置であり、前述の射影線を軸とする。一方、投影平面は円錐の軸とは一般には斜めに交わっている。円錐と平面の交点は楕円になることが知られているので、小円の像は楕円となる。円錐の軸と平面の交点は、この楕円の焦点の一つとなる。

なお、球面上の角度は維持されない。

4.3 立体射影

立体射影では、球面上の一点 Z に射影中心を置き、それと双対な大円 C を含む射影平面 \mathbb{E} に射影像を作成する。 $z > 0$ の球面 S^+ 上の点の像は C の外部に、 $z < 0$ の S^- は C の内部に、 $z = 0$ の大円は C に射影されるのは明らかであろう。

立体射影では、球面上の図形の角度が射影面でも維持されるという**等角** (conformal)

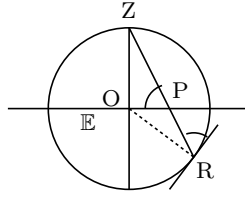


図 4.1 立体射影における等角性

性が成り立つ。それは次のようにして証明できる。図 4.1 に示すように、球面上のある点 R を通る射影中心 Z からの射影線に対する Z での接平面と、射影平面 \mathbb{E} の二つの平面に着目すると、射影線に対し、両者が同じ角度で交わっている。射影線と接平面の角度を θ とすると、 $\angle ZRO$ は $\pi/2 - \theta$ となる。三角形 ORZ は二等辺三角形なので、 $\angle OZR$ も $\pi/2 - \theta$ となる。したがって、 $\angle ZPO$ つまり射影線と射影平面の間の角も θ となる。球面上の角度というものはある点、例えば R から発生する二本の接線により定義される。それぞれの接線と直線 ZR を含む二枚の平面を考える。これらが ZR と同じ角度で交叉する射影平面と交わるので、射影平面でも同じ角度で交わることが明かである。(証明終り)

球面上の小円を含むすべての円の射影像は円となる。ただし球面上の大円の射影像と、射影平面の半径 1 の円の直径の両端を通過する。ただし、射影中心を通過する小円や大円の像だけは直線となる。この証明は以下ようになる。球面上の任意の小円の上の点 R (座標ベクトル \mathbf{r}) は球面に拘束されているので $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$ 。また、球面と交叉する平面上にあるので、球面を向く長さ 1 の任意の固定ベクトル $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ を使い、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = b$ 。 $0 < b < 1$ であり、この固定ベクトルの原点から b の位置で直交する平面上に存在することになる。射影像のベクトルを $\mathbf{p} = (x_P, y_P, 0)$ とする。 \mathbf{p} は球面の頂点 Z ($\mathbf{r}_Z = (0, 0, 1)$) と R を通過する直線上にあるので、

$$\mathbf{p} = (1 - t)\mathbf{r}_Z + t\mathbf{r}.$$

球面束縛から、

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{t^2} [\mathbf{p} - (1 - t)\mathbf{r}_Z] \cdot [\mathbf{p} - (1 - t)\mathbf{r}_Z] = \frac{1}{t^2} [x_P^2 + y_P^2 + (1 - t)^2] \quad (= 1).$$

これを纏めると、

$$x_P^2 + y_P^2 + 1 - 2t = 0$$

また平面束縛から、

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{t} [\mathbf{p} - (1 - t)\mathbf{r}_Z] \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{t} [x_P x_a + y_P y_a - (1 - t)z_a] \quad (= b)$$

したがって、 $t = (x_P x_a + y_P y_a - z_a) / (b - z_a)$ となり x_P, y_P の一次式である。これを前式の二次式に代入しても、二次の係数は1のままなので、 $(x_P, y_P, 0)$ は xy 平面内の円となる。

特例として、点 Z を通過する円の像は直線となる。それは円を含む平面が点 Z を含むため、その像がこの平面と射影面 \mathbb{E} との交線になるからである。

球面上の直線である大円と円 C の二つの交点は、円 C の直径の両端に位置するが、これら交点の像は、これらの点そのものとなる。したがって、球面直線は円 C の直径の両端の関係にある二点を通過する円となる。点 Z を通過する大円の像は円 C の中心を通過する直線となる。

第 5 章

双曲幾何学

球面幾何学では近傍では平行だった線も遠方まで行くと必ず交叉する。逆に近傍では平行だった線が遠方まで行くとどんどん離れていくような非ユークリッド幾何学も存在する。その代表がミンコフスキー計量を用いた**双曲幾何学** (hyperbolic geometry) である。本章の内容は球面幾何学の内容と酷似している。そのため、記述の列挙の仕方なるべく球面幾何学の章と合せたので、比較しながら読んでほしい。**双曲(形)** (hyperbolic (adj.)) は多出するため「H」と省略することとする。同様に、**ミンコフスキー** (Minkowski) も「M」と省略することとする。

5.1 双曲面と双曲距離

双曲幾何学は、回転双曲面の上に描かれる図形の関する幾何学である。回転双曲面とは以下の式に従う曲面である。

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

具体的には y 軸の方向から見ると、 $z = \pm 1$ である点 Z_+ , Z_- より上下方向に広がる双曲線であり、それを z 軸の周りに回転させた漏斗状の構造を持ち、**二葉双曲面** (hyperboloid of two sheets) \mathbb{H}_2 とよばれる。特に $z > 0$ の \mathbb{H}_2^+ をもっぱら扱うので、単に双曲面あるいは \mathbb{H} という場合には \mathbb{H}_2^+ を指すものとする。

上式の右辺が 1 の場合は y 軸の方向から見ると、 $x = \pm 1$ より左右方向に広がる双曲線であり、それを z 軸の周りに回転させると、全体が繋がった一枚の側面が開いたドーナツのような構造を持つ**一葉双曲面** (hyperboloid of one sheet) \mathbb{H}_1 となる。一葉双曲面も \mathbb{H} 上の点の性質を扱う際に補助的に利用され、多くの場合、 $z > 0$ の \mathbb{H}_1^+ が使われる。

上式で右辺が 0 の場合は y 軸の方向から見ると、 $z = \pm x$ なる $\pm 45^\circ$ の斜線を z 軸の周

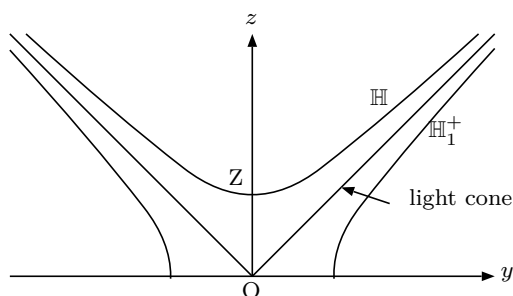


図 5.1 $z > 0$ の二葉双曲面 \mathbb{H} , 光円錐, 一葉双曲面 \mathbb{H}_1^+

りに回転させた円錐となり, \mathbb{H}_2 と \mathbb{H}_1 の境を形成する. 相対論では**光円錐** (optical cone) と呼ばれる. 図 5.1 に, これらの $z > 0$ の構造を示す.

また, 球面幾何学で三角関数が多用されたように, 双曲幾何学では以下の式で定義される**双曲線関数** (hyperbolic function) が使われる.

$$\begin{aligned} \sinh(s) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, & \cosh(s) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \\ \tanh(s) &= \frac{\sinh(s)}{\cosh(s)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

これらは, x 軸の方に開いた双曲線上にある点 P に対し, x 軸, OP, 双曲線で囲まれた領域の面積^{*1}を $s/2$ とする時の, y , x と一致するのであるが, その定義を使ってもあまり便利ではないので指数関数による定義を示した. csch , sech , coth なども, これらを使って三角関数と同じように定義されるが, 本章ではあまり使われないので, 定義を省略する. まず, 三角関数と同様な公式が成立する.

$$\begin{aligned} \cosh(-s) &= \cosh(s), & \sinh(-s) &= -\sinh(s), & \tanh(-s) &= -\tanh(s), \\ \cosh^2(s) - \sinh^2(s) &= 1 & 1 - \tanh^2(s) &= \frac{1}{\cosh^2(s)}. \end{aligned}$$

双曲線関数に関する加法定理も三角関数と似た形となる.^{*2}

*1 三角関数では双曲線が円に置き換る

*2 \sinh や \tanh の積が入るごとに負号が反転する.

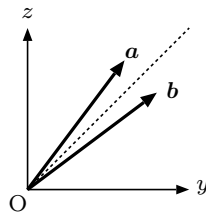


図 5.2 M 直交する二つのベクトルは 45° の直線に対称の位置になる

$$\begin{aligned}\sinh(s+t) &= \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t), \\ \cosh(s+t) &= \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t), \\ \tanh(s+t) &= \frac{\tanh(s) + \tanh(t)}{1 + \tanh(s)\tanh(t)}.\end{aligned}$$

これらの証明は、(5.1) の定義式を使って簡単にできる。

5.2 M 内積と双曲直線

図形を扱うには、辺の長さや頂点の角度が重要な概念となってくるが、そのために有効なのが、内積の概念である。任意の二つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し、次に示す M 内積 (M inner product) を導入する。 M 計量 (M metric) ともいう。

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b - z_a z_b.$$

なお、この定義は数学の分野でしばしば使われるが、相対論の分野ではこれの符号反転した定義がしばしば用いられるが、議論の大局は変わらない。

この M 内積で距離の定義される空間を一般に M 空間 (M space) とよぶ。 $\|\mathbf{a}\|_M = \sqrt{\mathbf{a} \odot \mathbf{a}}$ はベクトルの M 長さ (M length) を表し、 M ノルム (M norm) ともいう。

$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 0$ の時には、 M 直交 (M orthogonal, M right-angled) しているという。例えば xz 面内の任意の二つのベクトル $\mathbf{a} = (x_a, 0, z_a)$ と $\mathbf{b} = (x_b, 0, z_b)$ が M 直交しているとしよう。すると $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = z_a z_b - x_a x_b = 0$ となるので、 $z_b/x_b = x_a/z_a$ となる。つまり、図 5.2 に示すように、二つのベクトルは $z = x$ の斜め 45° の線に対し、対称な方向を向いている。ユークリッド直交のような関係とはやや異なっていることに注意してほしい。

自分自身との内積 $\mathbf{a} \odot \mathbf{a}$ はユークリッド内積の場合には非負である。そこで、この平方根をノルムとよび、ベクトルの長さに対応するとしてきた。しかし、 M 内積では $\mathbf{a} \odot \mathbf{a}$ は正にも負にもなりうる。例えば座標ベクトル \mathbf{r} を見てみよう。もし \mathbf{r} が二葉双曲面 \mathbb{H}_2

上の点を指している時には、 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ であるので、 $\mathbf{r} \odot \mathbf{r} = -1$ であるが、 \mathbf{r} が一葉双曲面 \mathbb{H}_1 上の点を指している時には、 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ であるので、 $\mathbf{r} \odot \mathbf{r} = 1$ である。一般に、座標ベクトルが光円錐中を向く場合、M 内積は負であるし、光円錐外を向けば正である。さらに、光円錐に沿う場合には 0 となる。

原点を通る任意の平面と双曲面の交線を、**双曲直線** (hyperbolic line) とする。ただし、この平面が \mathbb{H}_2^+ と交叉するためには、 xy 平面より 45° 以上立っている必要がある。この交線自身も \mathbb{R}^3 空間で見ると双曲線であるが、双曲面に拘束された n 人から見ると、二点を結ぶ最短距離 (証明は省く) となっており、ちょうど球面幾何学での球面直線が平面と球面の交線である大円であることに対応する。

今、二つの座標ベクトル \mathbf{w}, \mathbf{u} をうまく選んで、 $\mathbf{r} = Z\mathbf{w} + X\mathbf{u}$ とし、 X, Z を変化させて得られる平面と双曲面 \mathbb{H} の交線が、 $Z^2 - X^2 = 1$ と表現される条件を求めよう。双曲面は $\mathbf{r} \odot \mathbf{r} = -1$ で表わされるので、これに代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \odot \mathbf{r} &= (Z\mathbf{w} + X\mathbf{u}) \odot (Z\mathbf{w} + X\mathbf{u}) \\ &= Z^2\mathbf{w} \odot \mathbf{w} + ZX(\mathbf{w} \odot \mathbf{u} + \mathbf{u} \odot \mathbf{w}) + X^2\mathbf{u} \odot \mathbf{u} \quad (= -1). \end{aligned}$$

したがって、次式が成立する必要がある ($\mathbf{u} \odot \mathbf{w} = \mathbf{w} \odot \mathbf{u}$ に注意)。

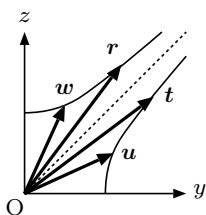
$$\mathbf{w} \odot \mathbf{w} = -1, \quad \mathbf{w} \odot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \odot \mathbf{u} = 1.$$

これは $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_2$, $\mathbf{u} \in \mathbb{H}_1$ であり、かつ互いに M 直交していることを示す。つまり、 \mathbf{w}, \mathbf{u} は M 空間での正規直交系 (長さが 1 で互いに直交する) の単位ベクトルであるともいえる。図 5.2 からわかるように、 \mathbf{u} は \mathbb{H}_1 の $z > 0$ 側に存在する。これらを双曲直線上の点を表現するときの **H 基底** (H base) とよぼう。三次元空間の M 基底は後に述べるように、もう一つある (第三の基底 \mathbf{v}) が、双曲直線を表現する際は、二つでも可能であるのでこの節では二つについて議論する。ここで、我々の扱う \mathbb{H}_1 は実は \mathbb{H}_1^+ で十分であることがわかる。ただし、以下に述べる各種証明では、 \mathbb{H}_1^+ に限らないで反対向きの \mathbb{H}_1^- にまで拡張して議論した方が便利なこともあるので、 \mathbb{H}_1^+ と特記しない場合には拡張された \mathbb{H}_1 であると理解してほしい。

$Z^2 - X^2 = 1$ であるので、しばしば $Z = \cosh(s)$, $X = \sinh(s)$ と記載し、双曲直線の満す方程式を次のように記載する。

$$\mathbf{r} = \cosh(s)\mathbf{w} + \sinh(s)\mathbf{u}. \tag{5.2}$$

つまり、双曲幾何学における双曲直線が、この式で s を動かすことにより得られる。

図 5.3 r に対応する接線ベクトル t

(5.2) を見ると, w は双曲直線で原点に一番近い所 (ユークリッド計量的に) を指す位置ベクトルで, u はそれと直交する xy 平面内のベクトルでなければならぬように感じるかも知れないが, それは誤解である. $r \odot r = -1$ からわかるように, 双曲面の上の点はいずれも原点から等 M 距離にあるので, 同じ双曲直線のどの点であってもまったく問題ない. H 距離 (H distance) と新しい用語を使ったが, 二点間を結ぶベクトルの M 長さのことである. 実際, 同一平面内にある新たな次のような H 基底を考えてみよう.

$$\begin{aligned} w' &= \cosh(s') w + \sinh(s') u, \\ u' &= \sinh(s') w + \cosh(s') u. \end{aligned} \quad (5.3)$$

これが基底であることは, $w' \odot w' = -1$, $w' \odot u' = 0$, $u' \odot u' = 1$ となることから直ちに理解できる. (5.3) から逆に元の基底を, 新しい基底で表現してみよう.

$$\begin{aligned} w &= \cosh(s') w' - \sinh(s') u', \\ u &= -\sinh(s') w' + \cosh(s') u'. \end{aligned}$$

これを (5.2) に代入すると, 新しい基底で記述された r の表現が得られる.

$$\begin{aligned} r &= \cosh(s) (\cosh(s') w' - \sinh(s') u') + \sinh(s) (-\sinh(s') w' + \cosh(s') u') \\ &= \cosh(s - s') w' + \sinh(s - s') u'. \end{aligned} \quad (5.4)$$

つまり, $s \rightarrow (s - s')$ とすれば, 新しい基底 w', u' が使えるのである.

単位長の二つのベクトルのユークリッド内積は $\cos(s)$ となることが知られているが, M 内積は $\Delta s = s_B - s_A$ として, 以下のようなになる.

$$\begin{aligned} r_A \odot r_B &= (\cosh(s_A) w + \sinh(s_A) u) \odot (\cosh(s_B) w + \sinh(s_B) u) \\ &= -\cosh(s_B) \cosh(s_A) + \sinh(s_B) \sinh(s_A) = -\cosh(\Delta s). \end{aligned}$$

5.3 接線ベクトル

$\mathbf{r} = \cosh(s)\mathbf{w} + \sinh(s)\mathbf{u}$ とし, $s \rightarrow s + ds$ としてみよう. この時, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ として, $d\mathbf{r}$ を求めてみよう.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \cosh(s + ds)\mathbf{w} + \sinh(s + ds)\mathbf{u} - (\cosh(s)\mathbf{w} + \sinh(s)\mathbf{u}) \\ &= (\cosh(s)\cosh(ds) + \sinh(s)\sinh(ds))\mathbf{w} + (\sinh(s)\cosh(ds) + \cosh(s)\sinh(ds))\mathbf{u} \\ &\quad - \cosh(s)\mathbf{w} - \sinh(s)\mathbf{u} = (\sinh(s)\mathbf{w} + \cosh(s)\mathbf{u})ds \quad (= \mathbf{t}ds). \end{aligned}$$

この右辺を $\mathbf{t}ds$ と定義しよう. つまり, s を増加すると移動していく方向であるので, $\mathbf{t}ds$ は双曲直線の接線の方向を向くベクトルである. $\mathbf{r} \odot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{t} \odot \mathbf{t} = 1$ が成立するので, 次式で定義される \mathbf{t} は双曲直線の**接線ベクトル** (tangent vector) である.

$$\mathbf{t} = \pm(\sinh(s)\mathbf{w} + \cosh(s)\mathbf{u}) \quad (5.5)$$

この関係を図 5.3 に示すが, 接線の方向は二方向あるので \pm を付した (特に断わらない場合は, 正号, つまり s の増加につれ \mathbf{r} が動いていく方向). 接線ベクトルは, これから双曲三角形のいくつかの定理を証明する際に, 積極的に利用される重要な概念である. なお, $\mathbf{w} = \mathbf{r}$ とすれば, $\mathbf{u} = \mathbf{t}$ である.

さて, $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ の接線ベクトルを $\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_A \odot \mathbf{t}_B &= (\sinh(s_A)\mathbf{w} + \cosh(s_A)\mathbf{u}) \odot (\sinh(s_B)\mathbf{w} + \cosh(s_B)\mathbf{u}) \\ &= -\sinh(s_B)\sinh(s_A) + \cosh(s_B)\cosh(s_A) = \cosh(\Delta s) = -\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_B \quad (5.6) \end{aligned}$$

である. 平面幾何学であると, 同じ直線に乗っていれば接線ベクトルは常に等しいが, 非ユークリッド空間では, ここにあるように, その保証はない. A, B 二点の接線の向きを互いに対向するように $\mathbf{t}_{AB}, \mathbf{t}_{BA}$ のように選択すれば,

$$\mathbf{t}_{AB} \odot \mathbf{t}_{BA} = \mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_B.$$

さて, $A, B \in \mathbb{H}$ とし, これら二点と原点を含む平面を考える. これら二つの座標ベクトルは, 共通の基底 \mathbf{w}, \mathbf{u} を用いて次のように記述することができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \cosh(s_A)\mathbf{w} + \sinh(s_A)\mathbf{u}, \\ \mathbf{r}_B &= \cosh(s_B)\mathbf{w} + \sinh(s_B)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

これを \mathbf{w}' , \mathbf{u}' を基底に替えると, (5.4) より, すべての \sinh や \cosh の引数が s' だけ減ることは明かであろう. したがって, $s_B - s_A$ は基底の取り方に依存せずに維持されることがわかる. つまり, \mathbf{w} , \mathbf{u} の選択には大きな自由度があることが理解できよう.

\mathbf{w} の具体的な候補の一つは次のようにして得られる. まず, xy 平面と $x = 0$ で交叉し, z 軸から θ 傾むいている平面 $x = \alpha z$ を考えよう. $\alpha = \tan(\theta)$ である. これと, 二葉双曲面との交線を求めるには次式に代入すればよい.

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

その結果, $\beta^2 = 1/(1 - \alpha^2)$ として, 次式が得られる.

$$\frac{z^2}{\beta^2} - y^2 = 1.$$

これを $\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = 1$ と比較すると, $z = \beta \cosh(s)$, $y = \sinh(s)$ とすれば, パラメータ s で置き換えることができる.

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha\beta \cosh(s), \\ y &= \sinh(s), \\ z &= \beta \cosh(s). \end{aligned} \right\}$$

さらに, z 軸の周りに ϕ 回転すると, s をパラメータとした双曲直線の式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha\beta \cosh(s) \cos(\phi) - \sinh(s) \sin(\phi), \\ y &= \alpha\beta \cosh(s) \sin(\phi) + \sinh(s) \cos(\phi), \\ z &= \beta \cosh(s). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

適当に選ばれた α, β, s に対し $\mathbf{w} = (x, y, z)$ となり, $\mathbf{w} \odot \mathbf{w} = -1$ が確認できる. さらに, 前述のように, もう一つの基底は $\mathbf{u} = d\mathbf{w}/ds$ で得られる.

5.4 双曲線分の長さ

$s_B - s_A$ が基底の選択によらず維持されることから $s_B - s_A$ は A と B の間の双曲直線, つまり双曲線分 (hyperbolic line segment) の長さとの強い関係を持っていることが予想される. 実際, 長さは (5.2) を利用して, 次のようにして計算できる.

$$\int_A^B ds \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \int_A^B ds |\cosh(s) \mathbf{w} + \sinh(s) \mathbf{u}| = \int_A^B ds = |s_B - s_A|.$$

つまり双曲線分の H 長さ (H length) は $|s_B - s_A|$ である. これは実は M 距離である M 長さと同じである. 以後は H 長さと呼ぶ.

ここで一つ注意しておくことがある. それは s で測られるのは H 長さであり, ユークリッド空間における長さではないということである. 例えば, \mathbf{w} を $(0, 0, 1)$, \mathbf{u} を $(1, 0, 0)$ とすれば $\mathbf{r} = (\sinh(s), 0, \cosh(s))$ となるが, ds に対する $d\mathbf{r} = (\cosh(s), 0, \sinh(s))ds$ で与えられる. この短いベクトルの H 長さは $\|d\mathbf{r}\|_H = \sqrt{\cosh^2(s) - \sinh^2(s)}ds = ds$ と一定となるが, ユークリッド長さは $\|d\mathbf{r}\| = \sqrt{\cosh^2(s) + \sinh^2(s)}ds = \cosh(2s)ds$ となり, s の増加につれ増大, 特に大きな s に対しては指数関数的に増大するので, 注意してほしい.

5.5 双曲直線間の角度

双曲面 \mathbb{H} 内の同じ点を起点とする二つの双曲線分の間を角度を考えよう. 例えば点 A から点 B, C に引かれた二つの線分を AB, AC とする時, それぞれの接線 t_{AB} および t_{AC} の間の角度を対象としよう. これら接線ベクトルは \mathbf{A} と M 直交してるので, 原点に移動すればいずれも \mathbb{H}_1^+ 上の点を指す.

こうしたベクトルを対象にして議論を続ける. 今, \mathbb{H}_1^+ 上の点を指す座標ベクトル \mathbf{q} を考え, \mathbb{H}_1 内の二つのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} をうまく選んで, $\mathbf{q} = X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}$ と記載 (なお, 一つのベクトルならば, \mathbf{w}, \mathbf{u} でも記載できる) し, X, Y を変化させて得られる平面と一葉双曲面 \mathbb{H}_1 の交線が $X^2 + Y^2 = 1$ と表現される条件を求めよう. 一葉双曲面は $\mathbf{q} \odot \mathbf{q} = 1$ で表わされるので, これに代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \odot \mathbf{q} &= (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}) \odot (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v}) \\ &= X^2\mathbf{u} \odot \mathbf{u} + XY(\mathbf{u} \odot \mathbf{v} + \mathbf{v} \odot \mathbf{u}) + Y^2\mathbf{v} \odot \mathbf{v} \quad (= 1). \end{aligned}$$

したがって, 次式が成立する必要がある ($\mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \mathbf{v} \odot \mathbf{u}$ に注意).

$$\mathbf{u} \odot \mathbf{u} = 1, \quad \mathbf{u} \odot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \odot \mathbf{v} = 1.$$

これは $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}_1$ であり, かつ互いに M 直交していることを示す. つまり, \mathbf{u}, \mathbf{v} は正規直交系 (長さが 1 で互いに直交する) の単位ベクトルであるともいえる.

したがって, $X = \cos(s), Y = \sin(s)$ と記載し, \mathbb{H}_1 内の双曲直線の満す方程式を次のように記載することができる.

$$\mathbf{q} = \cos(s)\mathbf{u} + \sin(s)\mathbf{v}.$$

双曲面 \mathbb{H} 上の 2 双曲線分 AB, AC のなす H 角度 (H angle) は, それぞれの点 A における接線 t_{AB} と t_{AC} (共に \mathbb{H}_1^+ の座標ベクトル) の双方を通過する双曲直線 $q = \cos(s)\mathbf{u} + \sin(s)\mathbf{v}$ を用い, その間の角度 $|s_c - s_b|$ とすればよい.

w の候補としては \mathbb{H} 上の任意の点を指すベクトルを採用した. \mathbf{u} にはその点を起点とする任意方向の接線ベクトル \mathbf{t} がよいだろう. また, \mathbf{v} の候補としてはこの二つのベクトルと M 直交する別の接線ベクトルがよいだろう. M 外積の概念があれば, $\mathbf{r}_0 \otimes \mathbf{t}$ のことである.

このように, 双曲幾何学は互いに M 直交する, \mathbb{H} 内の w , \mathbb{H}_2^+ 内の \mathbf{u}, \mathbf{v} の合せて三つの H 基底により議論することができる. w は双曲面上の任意の点と原点を通過する単位ベクトル, \mathbf{u} はこの点を通過する任意の双曲直線の接線, \mathbf{v} はこの点を通過しこの双曲直線と直行する別の双曲直線の接線である.

5.6 双曲三角形と双曲余弦定理

双曲面上の 3 点を 3 本の双曲直線で結んだものを, **双曲三角形** (hyperbolic triangle) といひ, それについて成立する**双曲三角法** (hyperbolic trigonometry) について説明する. 双曲面上の双曲三角形の頂点を A, B, C , 各頂点における角度を A, B, C , 対する辺の H 長さを a, b, c とする.

双曲線分 CA, CB の点 C における接線を t_{CA}, t_{CB} としよう. これらを原点へ移動すると, いずれも \mathbf{r}_C に M 直交する平面と一葉双曲面 \mathbb{H}_1^+ の交点を指すベクトルである. その間の H 角度は $C = \angle C$ である. このため, $t_{CA} \odot t_{CB} = \cos(C)$ となる. 一方, $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{r}_C \cosh(a) + t_{CA} \sinh(a), \\ \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_C \cosh(b) + t_{CB} \sinh(b). \end{aligned}$$

と書ける. したがって,

$$\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_B = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) (t_{CA} \odot t_{CB}).$$

$\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_B = \cosh(c)$ および $t_{CA} \odot t_{CB} = -\cos(C)$ なので, 次式の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(C), \\ \cos(C) &= \frac{-\cosh(c) + \cosh(a) \cosh(b)}{\sinh(a) \sinh(b)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

下式は上式を変形しただけである。これは**双曲余弦定理** (hyperbolic cosine theorem) とよばれる関係式である。

a, b に関する双曲余弦関数の加法定理は以下のようになる。

$$\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b).$$

これと (5.8) を比較しよう。 $-\cos C \leq 1$ なので、 $\cosh(a + b) > \cosh(c)$ 。 \cosh は正引数に関し増加関数なので、 $a + b > c$ 、つまり次の**三角不等式** (triangle inequality) が成立する。

$$c < a + b.$$

5.7 双曲ピタゴラスの定理

$C = \angle C$ を直角とする双曲直角三角形に対し、**双曲ピタゴラスの定理** (hyperbolic Pythagorean theorem) と呼ばれる式が成立する。

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b). \quad (5.9)$$

$$\sin(A) = \frac{\sinh(a)}{\sinh(c)}, \quad \sin(B) = \frac{\sinh(b)}{\sinh(c)}. \quad (5.10)$$

$$\cos(A) = \cosh(a) \sin(B), \quad \cos(B) = \cosh(b) \sin(A). \quad (5.11)$$

(5.9) は余弦定理 (5.8) で $\angle C = \pi/2$ としただけである。

(5.10) については、双曲三角形 ABC の A から AC の接線を \mathbf{t}_{AC} 、A から AB の接線を \mathbf{t}_{AB} 、C から CB の接線を \mathbf{t}_{CB} とし、まず、 \mathbf{t}_{AB} を残る二つの直交する接線で表す。

$$\mathbf{t}_{AB} = \cos(A) \mathbf{t}_{AC} + \sin(A) \mathbf{t}_{CB}.$$

さらに、点 A を基準に点 C、B を表す。また、点 C を基準に点 B を表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \cosh(b) \mathbf{r}_A + \sinh(b) \mathbf{t}_{AC}, \\ \mathbf{r}_B &= \cosh(c) \mathbf{r}_A + \sinh(c) \mathbf{t}_{AB} \\ &= \cosh(a) \mathbf{r}_C + \sinh(a) \mathbf{t}_{CB}. \end{aligned}$$

これらより、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B \odot \mathbf{t}_{CB} &= \sinh(a), \\ \mathbf{r}_B \odot \mathbf{t}_{CB} &= \sinh(c) (\mathbf{t}_{AB} \odot \mathbf{t}_{CB}) = \sinh(c) \sin(A). \end{aligned}$$

したがって、左式が得られる。右式も点 A と点 B の立場を入れ替えれば証明できる。

(5.11) については、

$$\begin{aligned} t_{AB} \odot t_{AC} &= \cos(A), \\ t_{AB} \odot t_{AC} &= \left(\frac{r_B - \cosh(c) r_A}{\sinh(c)} \right) \odot t_{AC} = \frac{r_B \odot t_{AC}}{\sinh(c)} \\ &= \frac{(\cosh(a) r_C + \sinh(a) t_{CB}) \odot t_{AC}}{\sinh(c)} = \frac{\cosh(a)(r_C \odot t_{AC})}{\sinh(c)} \\ &= \frac{\cosh(a) \sinh(b)}{\sinh(c)} = \cosh(a) \sin(B). \end{aligned}$$

したがって、左式が得られる。右式も $t_{BA} \odot t_{BC}$ より証明できる。

5.8 双曲三角形の内角の和と面積

$\angle C$ の双曲直角三角形に対する双曲ピタゴラスの定理の (5.11) を利用し、次の余弦加法定理の右辺を変形する。

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) = (\cosh(a) \cosh(b) - 1) \sin(A) \sin(B).$$

この右辺は正であるので、 $A + B < \pi/2$ となり、双曲直角三角形の残る二角の和は直角より小さいことが証明される。これより、双曲直角三角形を二つ合せた一般の**双曲三角形内角の和** (sum of interior angles of a hyperbolic triangle) についても、次式が成立する。

$$A + B + C < \pi.$$

上式よりさらに、最左辺および最右辺をそれぞれ書き直し、この双曲直角三角形の a, b が十分小さいとすると、

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - A - B\right) &= (\cosh(a) \cosh(b) - 1) \frac{\sinh(a) \sinh(b)}{\sinh(c) \sinh(c)} \\ &\approx \frac{a^2 + b^2}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

右辺はこの小さな三角形の面積 S であり、左辺も $\pi/2 - A - B$ に近似できるので、 $S = \pi/2 - (A + B)$ が成立する。したがって、直角三角形を二つ合せた一般の小さな双曲三角形については、 $S = \pi - (A + B + C)$ が成立する。

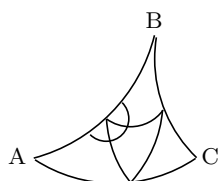


図 5.4 大きな三角形は小さな三角形に分割できる

もっと大きな**双曲三角形の面積** (area of a hyperbolic triangle) については、その中を小さな三角形に分割する。例えば、**図 5.4** のように、三辺の midpoint 付近 (厳密な midpoint である必要はない) を三つの双曲線分で繋ぐと、4 つの三角形に分割できる。もし、この各 4 つの三角形の面積がそれぞれの三角形の頂点角を使って次式の形で与えられると、全体の三角形の面積も次式になることが簡単に証明できる。4 つの三角形にはそれぞれ三つの内角があるので、全体で 12 個の内角があることになる。それぞれ次式が成立するとすると、これらを全部合計すると、左辺は全体の面積、右辺は $4\pi - \sum_{i=1}^{12} (\text{内角})_i$ となる。12 個と書いたが、そのうち、3 個は A, B, C である。残る角度はすべて三つの midpoint 付近にそれぞれ 3 個ずつ存在する。これらの総和はいうまでもなく、 3π である。したがって、全体の三角形に対し次式が成立することになる。この少し小さい三角形が十分小さくなければ、それぞれをさらに 4 つの三角形に分離する。こうして再帰的に十分小さい三角形に分離すれば、それから積み上げて、大きな三角形に対しても、次式が成立する。

$$S = \pi - (A + B + C).$$

これを「双曲三角形の面積は**内角和不足量** (sum shortage of inner angles) である」といっておこう。

任意の双曲三角形の面積がこの式のように π からの内角和不足量で計算できるということは、種々の面積計算が平面図形に比べ圧倒的に楽である。例えば、双曲 n 角形の面積は $S = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n (\text{内角})_i$ となる。つまり「双曲 n 角形の面積も内角和不足量である」といえる。

5.9 双曲正弦定理

任意の双曲三角形 ABC に対し、以下の**双曲正弦定理** (hyperbolic sine theorem) が成立する。

$$\frac{\sinh(a)}{\sin A} = \frac{\sinh(b)}{\sin B} = \frac{\sinh(c)}{\sin C}.$$

これは点 C から双曲線分 AB に M 直交する M 垂線 (M perpendicular line) を下し、その足を点 D とする. 双曲三角形 CAD, および CBD に対し (5.10) を適用する. 双曲線分 CD の H 長さを x とすると,

$$\sinh(x) = \sin(A) \sinh(b) = \sin(B) \sinh(a).$$

これより最初の等号が証明できた. 点 A より BC に M 垂線を下すことにより, 次の等号も証明できる.

5.10 双対三角形

双曲上の任意の点 A に対応する r_A に M 直交する平面は双曲面とは交点を持たないが, 一葉双曲面 \mathbb{H}_1 とは交線 l_A を持つ. この点 A と曲線 (双曲直線) l_A の関係を互いに**双対** (dual) という.

逆に一葉双曲面 \mathbb{H}_1^+ 上の点 a に対し, それと M 直交する平面が双曲面 \mathbb{H} と作る交線を l_a とするとき, 点 a と曲線 (双曲直線) l_a は互いに双対であるという. つまり, 双曲面上の双曲直線 l_a に対し, 一葉双曲面上の点 a が双対となる. ただ a と書くと, 双曲線分の H 長さとの区別がつかないので, 点 A^* と書くこととする. なお点 A^* は $z > 0$ の H_1^+ 側のものを採用する.

さて, \mathbb{H} 上の任意の双曲三角形 ABC を考え, 双曲線分 BC と双対な点 a を A^* , 以下同様に B^* , C^* を定め, 三角形 $A^*B^*C^*$ を ABC の**双対双曲三角形** (dual hyperbolic triangle) という.

双対三角形の概念は平面三角形にはない. 平面三角形はそのサイズに比較し巨大な双曲面上の双曲三角形で近似できるが, 双対な三角形は非常に巨大となり, 永遠の彼方に発散してしまうからである.

さて, 原点から底までの長さが 1 の, 今迄と同じ双曲面上の双対三角形について議論しよう. 双曲線分 A^*B^* の H 長さは C ($= \angle C$), B^*C^* は A , C^*A^* は B に等しくなる. また, C^* ($= \angle C^*$) は双曲線分 AB の H 長さ c に, A^* は a に, B^* は b に等しくなる.

双曲面上の双曲三角形に双曲余弦定理が成立したように, 一葉双曲面上の双曲三角形には, 次の**双対双曲余弦定理** (dual hyperbolic cosine theorem) が成立する.

$$\begin{aligned} \cos(C) &= -\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \cosh(c), \\ \cosh(c) &= \frac{\cos(C) + \cos(A) \cos(B)}{\sin(A) \sin(B)}. \end{aligned}$$

この上式の証明は以下のように行う。双曲線分 C^*A^* , C^*B^* の点 C における接線を $t_{C^*A^*}$, $t_{C^*B^*}$ としよう。これらを原点へ移動すると、いずれも r_C^* に M 直交する平面と一葉双曲面 \mathbb{H}_1^+ の交点を指すベクトルである。その間の H 角度は $C^* = c$ である。このため、 $t_{C^*A^*} \odot t_{C^*B^*} = \cos(c)$ となる。一方、 r_{A^*}, r_{B^*} は

$$\begin{aligned} r_{A^*} &= \cos(A) r_{C^*} + \sin(A) t_{C^*A^*}, \\ r_{B^*} &= \cos(B) r_{C^*} + \sin(B) t_{C^*B^*}. \end{aligned}$$

と書ける。したがって、

$$r_{A^*} \odot r_{B^*} = -\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) (t_{C^*A^*} \odot t_{C^*B^*}).$$

$r_{A^*} \odot r_{B^*} = \cos(C)$ および $t_{C^*A^*} \odot t_{C^*B^*} = \cos(c)$ なので、証明終了。

5.11 M 外積

本書では二つのベクトルの双方に直交するベクトルという概念をなるべく使わないようにしてきた^{*3}が、ユークリッド幾何学では、外積という概念を使ってそれを表現する。双曲幾何学でも外積の概念を持っているといろいろ便利なため、任意の二つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し、次に示す M 外積 (M outer product) を導入する。ただし、紹介に止める。

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (y_a z_b - z_a y_b) \mathbf{i} + (z_a x_b - x_a z_b) \mathbf{j} - (x_a y_b - y_a x_b) \mathbf{k}.$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。なお、自分自身との M 外積は常に $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = 0$ である。

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \odot \mathbf{a} = 0$ および $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \odot \mathbf{b}$ は簡単に証明できる。このことから $\mathbf{n} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ はこれら二つのベクトルの作る面の M 法線 (M normal) であることがわかる。 \mathbf{n} の長さを正規化するために、 $\mathbf{n} \odot \mathbf{n}$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \odot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= (y_a z_b - z_a y_b)^2 + (z_a x_b - x_a z_b)^2 - (x_a y_b - y_a x_b)^2 \\ &= (z_a z_b - x_a x_b - y_a y_b)^2 - (z_a^2 - x_a^2 - y_a^2)(z_b^2 - x_b^2 - y_b^2) \\ &= (\mathbf{a} \odot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \odot \mathbf{a})(\mathbf{b} \odot \mathbf{b}). \end{aligned} \tag{5.12}$$

したがって、次式のように定義された \mathbf{n} は M 長さ 1 の M 法線ベクトルとなる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}}{\sqrt{|(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \odot \mathbf{a})(\mathbf{b} \odot \mathbf{b})|}}.$$

^{*3} 実は双対は直交の概念そのものである。

二つのベクトル $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ が双曲面 \mathbb{H} 上の点を指す座標ベクトルの場合には、この正規化定数の二乗は正となる。

$$(\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_B)^2 - (\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_A)(\mathbf{r}_B \odot \mathbf{r}_B) = \cosh^2(\Delta s) - 1 = \sinh^2(\Delta s).$$

ただし、 $\Delta s = s_B - s_A$ 。したがって、 $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ の正規化された M 法線 \mathbf{n} は次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_A \otimes \mathbf{r}_B}{|\sinh(\Delta s)|}.$$

こうして作られた \mathbf{n} は、 $\mathbf{n} \odot \mathbf{n} = \sinh^2(\Delta s)/|\sinh(\Delta s)|^2 = 1$ から、一葉双曲面 \mathbb{H}_1 に属することがわかる。またこのことから、次式が得られる。

$$|\mathbf{r}_A \otimes \mathbf{r}_B| = |\sinh(\Delta s)|.$$

双曲直線は双曲面上の二つの点、例えば A, B を通るものとして定義されるとする。点 A から点 B に向う双曲直線上の接線のベクトル \mathbf{t} を求めよう。

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{r}_A.$$

元々 M 直交している二つのベクトルの M 外積なので、これは正規化されている。さらに、(5.12) を利用し、 $\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_A = -1$ に注意して変形すると、

$$\mathbf{t} \odot \mathbf{t} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}_A) \odot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}_A) = (\mathbf{n} \odot \mathbf{r}_A)^2 - (\mathbf{n} \odot \mathbf{n})(\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_A) = 1.$$

したがって \mathbf{t} も一葉双曲面 \mathbb{H}_1 に属することがわかる。

M 外積のベクトルの方向は、一般に、先のベクトルから後のベクトルの方へ捻じった際、右ネジの進む方向となる。したがって、二つのベクトルの順番を逆にすると、その M 外積のベクトルの向きは反転する。座標ベクトルの M 外積の場合には、この順番を適切に選んで、M 外積ベクトルの z 成分が正となるようにするのがよい。

単位長の二つのベクトルのユークリッド外積の絶対値は $\sin(s)$ となることが知られているが、 \mathbb{H}_1 に属する二つのベクトルの M 外積は $\Delta s = s_b - s_a$ として、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b &= (\cos(s_a) \mathbf{u} + \sin(s_a) \mathbf{v}) \otimes (\cos(s_b) \mathbf{u} + \sin(s_b) \mathbf{v}) \\ &= [\sin(s_b) \cos(s_a) - \cos(s_b) \sin(s_a)](\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \sin(\Delta s)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}). \end{aligned}$$

第 6 章

双曲面の射影とクライン円板

球面の狭義の射影と同様に、ある光源から光を出し、双曲面上の点に当て、その像 (image) を平面に写したものを議論しよう。

6.1 中心射影とクライン円板

中心射影では、図 6.1 にあるように、任意の点と原点 O を結んだ直線が双曲面の底である点 Z に接した $z = 1$ の平面と交叉する点を像としている。 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、原点を通過する直線に沿って、全体を縮小し、 $z = 1$ にする訳なので、像の座標は $(x/z, y/z, 1)$ となる。光円錐 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ の像はクライン円板の円周になる。したがって、双曲面 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_2^+$ 全体の像は半径 1 の円内に射影される。この円板を**クライン円板** (Klein disk)

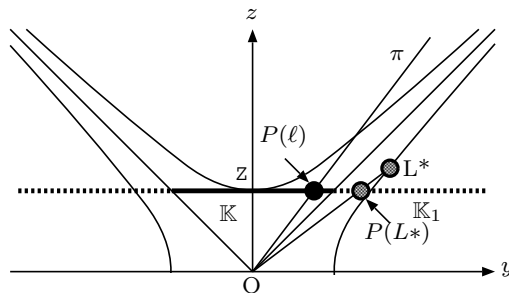


図 6.1 クライン円板 \mathbb{K}

平面 π 内の ℓ の像 $P(\ell)$ と、これと双対な点 L^* およびその像
横軸は、平面 π を真横から見るように選んでおり、像 $P(\ell)$ は点になる

\mathbb{K} という。

6.2 双曲直線の射影

任意の双曲直線は原点を含む平面内に存在するが、原点を含む平面の像はクライン円板で直線となるため、任意の双曲直線の像は直線となる。直線は光円錐に漸近するため、双曲直線の像は円板の縁から縁までとなる。

$z > 0$ の一葉双曲面 \mathbb{H}_1^+ 全体の像は \mathbb{K} と同一平面の円板外 \mathbb{K}_1 に一対一に射影される。一葉双曲面の $z = 0$ の円は無限遠に射影される。

6.3 クライン円板での M 距離

双曲面の長さは当然であるが、角度も正しく射影されない。しかし、双曲面上の 2 点 A, B を通過する双曲直線の像である直線と円板の縁との交点を C, D とする時、2 点間の M 長さは次式より読み取ることができる。

$$|\Delta s| = \frac{1}{2} \log \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot BD}$$

右辺に現われた 4 つの量の比を一般に複比 (double ratio) という。この式の証明は、以下のようなものである。 $(x_1, x_2) = (x, y)$ とし、その像の座標を $(X_1, X_2) = (x_1/z, x_2/z)$ としよう。 $\mathbf{r} = \cosh(s)\mathbf{w} + \sinh(s)\mathbf{u}$ と置いて、

$$X_k = \frac{x_k}{z} = \frac{\cosh(s)w_k + \sinh(s)u_k}{\cosh(s)w_z + \sinh(s)u_z} = \frac{w_k + \tanh(s)u_k}{w_z + \tanh(s)u_z}.$$

したがって、

$$\tanh(s) = -\frac{w_k - w_z X_k}{u_k - u_z X_k}.$$

さて \tanh の定義式より、次式が誘導できる。

$$e^{-2s} = \frac{1 - \tanh(s)}{1 + \tanh(s)}.$$

ここに前式を代入すると、 $\mathbf{c}^\pm = \mathbf{w} \pm \mathbf{u}$ というベクトルを用意し、さらにその射影像の座標を $X_k^{C^\pm} = c_k^\pm / c_z^\pm$ としよう。実はこの二つのベクトルは光円錐上に来て、かつ点 \mathbf{r} を挟んで反対側に位置するので C なる記号を採用した。

$$e^{-2s} = \frac{1 - \tanh(s)}{1 + \tanh(s)} = -\frac{w_k + u_k - (w_z + u_z)X_k}{w_k - u_k - (w_z - u_z)X_k} = -\frac{X_k^{C^+} - X_k \frac{C_z^+}{C_z^-}}{X_k^{C^-} - X_k \frac{C_z^-}{C_z^+}}.$$

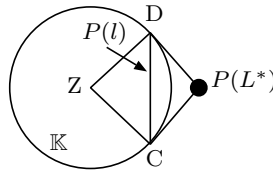


図 6.2 クライン円板上の像 $P(l)$ と像 $P(L^*)$ の上面図

ここで、この式を 2 点 A、B に対し求め、その比をとってみよう。

$$e^{2(s_B - s_A)} = \frac{X_k^{C+} - X_k^A X_k^{C-} - X_k^B}{X_k^{C-} - X_k^A X_k^{C+} - X_k^B}.$$

A、B 点を通る直線が、光円錐に対応する円板の縁の座標 X_k^{C+}, X_k^{C-} が点 D、C だとすると、

$$e^{2\Delta s} = \frac{AD \ BC}{AC \ BD}.$$

この対数をとれば、証明終り。

6.4 双対直線およびその双対点へのクライン円板上の射影

双曲直線 l の双対点を L^* とする。 L^* は \mathbb{H}_1^+ 面にある。図 6.2 にあるように、 L^* の像を $P(L^*)$ としよう。双曲直線 l の像 $P(l)$ が円板の縁と交叉する点を C、D とする。また、双曲面 \mathbb{H}_2^+ の底を点 Z とする。O と L^* を通過する任意の平面は常に双曲直線 l と直交することから、 $\mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_{P(L^*)} = 0$ 。 \mathbf{r}_C は光円錐上のベクトルなので $\mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_C = 0$ 。点 C、D、 $P(L^*)$ などはずべて像空間内にあるため $z = 1$ である。したがって、 $\mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_Z = \mathbf{r}_{P(L^*)} \odot \mathbf{r}_Z = 1$ である。これらを利用して、

$$(\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_C) \odot (\mathbf{r}_{P(L^*)} - \mathbf{r}_C) = \mathbf{r}_Z \odot \mathbf{r}_{P(L^*)} - \mathbf{r}_Z \odot \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_{P(L^*)} + \mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_C = 0$$

z 成分のない M 内積はユークリッド内積と同じ（正負反転している）なので、ZC と $P(L^*)C$ の二つの直線は直交する。つまり、点 $P(L^*)$ は点 C における円板の接線上にあることになる。点 D から円板の接線を引けば、これら 2 接線の交点として $P(L^*)$ が定まることになる。

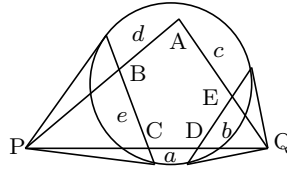


図 6.3 直角五角形のクライン像

6.5 直角五角形

7章で述べるポアンカレ円板内で作図してみると、双曲面にはすべての頂点の角度が直角な直角多角形は5以上何角形のものでも存在可能である。図 6.3 に示すように、**直角五角形** (right-angled pentagon) を ABCDE とし、各頂点の反対側の辺、例えば点 A に対しては、CD の M 長さを a、以下順に b、c、d、e とする。平面 OAB と OCD の交線および \mathbb{H}_1^+ と交点を P (図はこれの像を P としている) とする。また平面 OAE と OCD の交線および \mathbb{H}_1^+ と交点を Q (図はこれの像を Q としている) とする。AB、つまり AP が BC と直交しており、かつ DP が BC と直交しているということは、P は平面 BCO の双対点 E^* の射影である。したがって、 $OB = \mathbf{r}_B$ と $OP = \mathbf{r}_P$ は直交する。そこで、 $OA = \mathbf{r}_A$ は以下のようにこれらの一次結合で記載できる。

$$\mathbf{r}_A = \cosh(d) \mathbf{r}_B - \sinh(d) \mathbf{r}_P.$$

同様に、点 Q との関係から、

$$\mathbf{r}_A = \cosh(c) \mathbf{r}_E - \sinh(c) \mathbf{r}_Q.$$

二つの式の右辺第一項を移項して両辺の積を作ると、右辺は、

$$\begin{aligned} (-\sinh(d) \mathbf{r}_P) \odot (-\sinh(c) \mathbf{r}_Q) &= \sinh(c) \sinh(d) (\mathbf{r}_P \odot \mathbf{r}_Q) \\ &= -\sinh(c) \sinh(d) (\mathbf{r}_C \odot \mathbf{r}_D) = -\sinh(c) \sinh(d) \cosh(a) \end{aligned}$$

ここで、 $(\mathbf{r}_P \odot \mathbf{r}_Q)$ の変形には $\mathbf{r}_P = -\mathbf{t}_{CD}$ などであるので、(5.5) を利用した。左辺の積は、

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{r}_A - \cosh(d)\mathbf{r}_B) \odot (\mathbf{r}_A - \cosh(c)\mathbf{r}_E) \\
&= (\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_A) - \cosh(c)(\mathbf{r}_A \odot \mathbf{r}_E) - \cosh(d)(\mathbf{r}_B \odot \mathbf{r}_A) + \cosh(c)\cosh(d)(\mathbf{r}_B \odot \mathbf{r}_E) \\
&= -1 + \cosh^2(c) + \cosh^2(d) - \cosh^2(c)\cosh^2(d) = -(\cosh^2(c) - 1)(\cosh^2(d) - 1) \\
&= -\sinh^2(c)\sinh^2(d).
\end{aligned}$$

なお、 $\angle A$ が直角の双曲直角三角形 ABE に対し、ピタゴラスの定理 (5.9) を適用した結果の $(\mathbf{r}_B \odot \mathbf{r}_E) = -\cosh(c)\cosh(d)$ を利用している。この結果、次式の最初の式が得られる。他の式も ABCDE を順に入れ替えていけば、得られる。

$$\begin{aligned}
\cosh(a) &= \sinh(c)\sinh(d), & \cosh(b) &= \sinh(d)\sinh(e), \\
\cosh(c) &= \sinh(e)\sinh(a), & \cosh(d) &= \sinh(a)\sinh(b), \\
\cosh(e) &= \sinh(b)\sinh(c).
\end{aligned}$$

これらの式は直角双曲三角形に成立するピタゴラスの定理 (5.9) に酷似していることから、直角五角形のピタゴラスの定理と呼ばれる。

6.6 直角六角形

双曲面上の**直角六角形** (right-angled hexagon) に対し、正弦定理と余弦定理が成立する。まず正弦定理であるが、直角六角形の頂点を A, C', B, A', C, B' とし、辺の長さを点 A から順に順に、 b', a, c', b, a', c としよう。対向する一組の辺、例えば c, c' に対し共通垂線 (図で言えば RR') を立てる。 c, c' により切り取られたこの垂線の M 長さを d とする。この両側の二つの直角五角形に対し、前節のピタゴラスの定理を適用すると、 $\sinh(b')\sinh(a) = \cosh(d) = \sinh(b)\sinh(a')$ が成立する。これより、他の切断の結果も纏めると、正弦定理が得られる。

$$\frac{\sinh(a')}{\sinh(a)} = \frac{\sinh(b')}{\sinh(b)} = \frac{\sinh(c')}{\sinh(c)}$$

余弦定理は次のようにして誘導される。 \mathbf{r}_P を平面 OC'B に M 直交するベクトルとし、点 P をその像とする。以下、同様に R', Q, P', R, Q' とする。まず、(5.6) より、

$$\mathbf{r}_{Q'} \odot \mathbf{r}_{P'} = -\mathbf{r}_{B'} \odot \mathbf{r}_A = -\cosh(c).$$

さらに、(5.5) より、

$$\mathbf{r}_{Q'} = -\cosh(a)\mathbf{r}_{R'} + \sinh(a)\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_{P'} = -\cosh(b)\mathbf{r}_{R'} + \sinh(b)\mathbf{r}_{A'}.$$

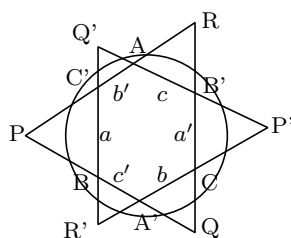


図 6.4 直角六角形のクライン像

したがって、 $r_{R'} \odot r_{R'} = 1$ 、 $r_{R'} \odot r_{A'} = r_{R'} \odot r_B = 0$ 、 $r_B \odot r_{A'} = -1$ を利用して、

$$r_{Q'} \odot r_{P'} = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cosh(c').$$

これらより、

$$-\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cosh(c').$$

こうして、次の余弦定理が得られる。

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= -\cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) \cosh(c'), \\ \cosh(c') &= \frac{\cosh(c) + \cosh(a) \cosh(b)}{\sinh(a) \sinh(b)}. \end{aligned}$$

第 7 章

双曲面の射影とポアンカレ円板

球面の狭義の射影と同様に、ある光源から光を出し、双曲面上の点に当て、その像 (image) を平面に写したものを議論しよう。

7.1 立体射影とポアンカレ円板

立体射影では、光源を二葉双曲面の下半分 \mathbb{H}_2^- の頂点 S とし、それを $z = 0$ の平面に射影する。点 S の座標ベクトルは $\mathbf{r}_S = (0, 0, -1)$ である。したがって、双曲面全体の像は半径 1 の円内に射影される。この円板をポアンカレ円板 (Poincaré disk) \mathbb{D} という。^{*1}

7.2 双曲直線のポアンカレ円板への射影

まず、 \mathbb{H}_1^+ の像は \mathbb{D} 内に作られるため、 \mathbb{H} の像と重なる。したがって、 \mathbb{H}_1^+ の議論には適していない。

完全に天下りであるが、双曲直線 $\mathbf{r} = \mathbf{w} \cosh(s) + \mathbf{u} \sinh(s)$ の像は $\mathbf{v} + \mathbf{r}_S$ の像を中心とする円になる。ただし、 \mathbf{v} は \mathbf{w}, \mathbf{u} に M 直交する \mathbb{H}_1 上の単位ベクトルである。これを証明しよう。図形が複雑になるため、[図 7.1](#) を参照してほしい。まず双曲面 \mathbb{H} 上の任意の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を点 S を基準にすると $\mathbf{r} - \mathbf{r}_S = (x, y, z + 1)$ 。これを円板に投影すると、 $z = \mathbf{r} \odot \mathbf{r}_S$ なので \mathbf{r} の像 $P(\mathbf{r})$ は次式で与えられる。ただし、 $t = 1/(1 + \mathbf{r} \odot \mathbf{r}_S)$ とする。 $\mathbf{r} \odot \mathbf{r}_S = z$ であるが、取り敢えずその置き換えはしない。

$$P(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) + \mathbf{r}_S \quad \text{where} \quad t = \frac{1}{1 + \mathbf{r} \odot \mathbf{r}_S}.$$

^{*1} 何故か \mathbb{P} としないようである。disk の D か。

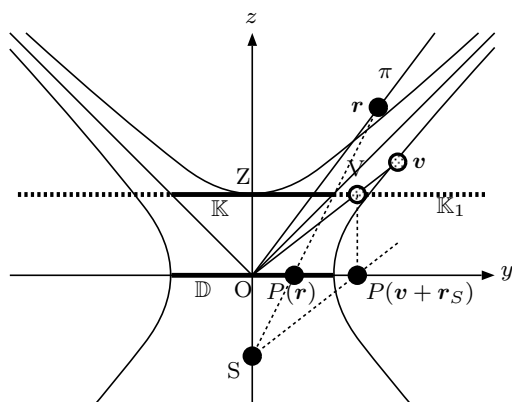


図7.1 ポアンカレ円板 \mathbb{D}

r の像 $P(r)$ と、 v のクライン像 V とそれを z 方向に下した $P(v+r_S)$ ($P(\ell)$ の中心) 横軸は、双曲直線を含む平面を真横から見るように選んでいる

続いて、 $P(v+r_S)$ であるが、上式の r の代わりに $v+r_S$ を代入することから、 $s = 1/(1+v \odot r_S + r_S \odot r_S) = 1/(v \odot r_S)$ として、

$$P(v+r_S) = sv + r_S \quad \text{where} \quad s = \frac{1}{v \odot r_S}.$$

そこで、

$$P(r) - P(v+r_S) = t(r - r_S) - sv.$$

これを利用して、

$$\begin{aligned} & (P(r) - P(v+r_S)) \odot (P(r) - P(v+r_S)) \\ &= t^2(r - r_S) \odot (r - r_S) + s^2 v \odot v - 2ts(r - r_S) \odot v \\ &= -2t^2(1 + r \odot r_S) + s^2 + 2tsr_S \odot v = s^2 \end{aligned}$$

ただし、 $1 + r \odot r_S = 1/t$ 、 $v \odot r_S = 1/s$ を使っている。したがって、 $P(r)$ は $P(v+r_S)$ を中心とし、半径 $s = 1/(v \odot r_S)$ の円であることが証明できた。以上の証明では双曲直線の像が円であり、かつその半径もわかっている前提で証明を行ったが、わかっていない場合には、(5.7) に示した任意の双曲直線の方程式の (x, y, z) から像の座標を求めればよい。

この円の中心 $V = P(v+r_S)$ が円板外に来ることから、円は円板外周と二点で交叉する。その片方を C とすると、平面三角形 OVC について、 $OV^2 = P(v+r_S) \odot P(v+r_S) =$

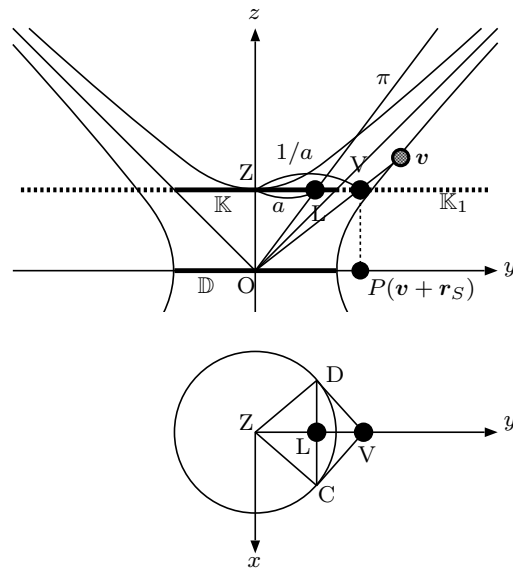


図 7.2 双曲直線 l を含む平面 π のクライン円板での像 L と、 v の像 V 、およびこれらを上から見た図
横軸は、平面 π を真横から見るように選んでいる

$(sv + r_S) \odot (sv + r_S) = s^2 + 2s/s - 1 = s^2 + 1$ 、 $HC^2 = s^2$ 、 $OC^2 = 1$ が成立するので、 $\angle C = \pi/2$ とする直角三角形である。つまり、点 C で円は円板縁と直交する。あるいは、円の点 C での接線は O を通過する。双曲直線の射影であるポアンカレ円板上の円（円板縁と直交する円）を P 直線とよぼう。

7.3 クライン円板とポアンカレ円板

これまでに見てきたように、双曲直線の像はクライン円板上では直線になり、ポアンカレ円板上では円弧となるが、この二つの関係が面白い。図 7.2 に見られるように、 z 軸を通る面で双曲直線の描かれている面に垂直なものを zy 面としよう。つまり、 (x, y, z) 座標を回転し、 y 軸がこの面内になるようにしたということである。すべての幾何学を x 軸方向から見てみると、双曲直線の描かれている面 π は直線に見える。この面 π と xy 面との交線が双曲直線のクライン面上での像であるが、この見方では一点となる。それを点 L としよう。点 L の z 軸からの距離を a としよう。次に、 π と M 直交するベクトル v を描く。これがクライン面と交叉する点を V としよう。点 V を 1 だけ下り下げれば、この双

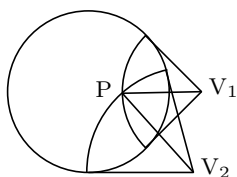


図 7.3 二本の双曲直線 ℓ の像の間の角度はポアンカレ円板上でも等しい

曲直線のポアンカレ像である円の中心である。点 V の y 座標は OL との M 直交性より $1/a$ である。

これらの関係を z 軸の方から見てみよう。クライン円板もポアンカレ円板も H を中心とする半径 1 の円となる。クライン像は点 K を通過し、 y 軸に直交する直線である。その直線がクライン (ポアンカレ) 円板の縁と交叉する点を C, D としよう。一方、ポアンカレ像は点 V を中心とする円であるが、 VC (または VD) を半径とする円となることが簡単に証明できる。つまり、双曲直線のクライン像とポアンカレ像には深い関係があるのである。

7.4 立体射影の等角性

二つの双曲直線 ℓ_i の間の角度はその交点 r における二つの双曲曲線の接線の間角度 θ で定義される。また、その交点で r と二つの接線に M 垂直な二つの法線 v_1, v_2 間の角度に等しい。したがって、二つの法線の M 内積は $v_1 \odot v_2 = \cos \theta$ と余弦に等しくなる。

図 7.3 を見よう。点 S から像 $P(v_i + r_S)$ に至るベクトル (つまり、原点 O からこの像の z を 1 増した点 V_i に至るベクトル) を $s_i v_i$ としよう。すると、 OV_i の自己 M 内積 (自分自身との内積) は s_i^2 となる。さらにこれらの二つの M 内積は $OV_1 \odot OV_2 |s_1 s_2| \cos \theta$ となる。これから、これら二点間を結ぶベクトル $V_1 V_2 (= OV_2 - OV_1)$ の自己 M 内積は

$$(V_1 V_2) \odot (V_1 V_2) = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos(\theta). \quad (7.1)$$

となる。また、二つの双曲直線の像である円の半径は、それぞれ s_i である。そこで三角形 $PV_1 V_2$ に着目すると、頂点 P を挟む二辺が s_1, s_2 で、 $(V_1 V_2)^2$ が (7.1) で与えられる平面余弦定理の形をしていることから、 $\angle V_1 P V_2 = \theta$ であることがわかる。点 P で交わる二つの円弧は、それぞれ点 P で PV_1, PV_2 に直交しているので、二つの円弧のなす角度も θ 、つまり元々の二本の双曲曲線のなす角度と一致する。

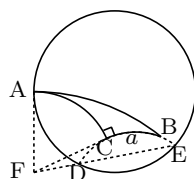


図 7.4 無限遠点を含む直角三角形から M 長さを知ることができる

7.5 M 長さの計測

ポアンカレ円板 \mathbb{D} 上の任意の P 線分の M 長さを知ることができる。図 7.4 にあるように、任意の P 線分 (円弧) を BC としよう。BC に直交する P 直線 (円) AC を描く。点 A は次のように定める。まず、円弧 BC の延長が \mathbb{D} 縁と交叉する点を D、E とし、この二点を通過する直線を描く。この直線と、点 C における接線との交点を F とし、FC を半径とする円を描き \mathbb{D} 縁との交点が A となる。次に AB を描くが、この弧の中心は点 A での接線上に存在するから、AB と (ユークリッド距離的に) 等距離にある二等分線と接線 AF の交点を中心として、AB を通る円を描けばよい。こうして A を無限遠点に持つ直角三角形が作図できる。この三角形に、双対双曲余弦定理を適用し、 $\angle A=0$ 、 $\angle C=\pi/2$ を代入すると以下のように変形でき、 $\angle B$ はポアンカレ円板上の角度として実測できるので、 $\cosh(a)$ 、つまり a が得られる。

$$\cos(A) = -\cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cosh(a),$$

$$1 = \sin(B)\cosh(a).$$

$$\cosh(a) = \frac{1}{\sin(B)}.$$

7.6 半球面モデル

原点 O を中心とする $z > 0$ の半球に射影中心を点 $S = (0, 0, -1)$ として双曲面を投影したものを半球面モデル (hemisphere model) という。射影中心を S として、ポアンカレ円板を半球に射影したものともいえる。特徴は、立体射影の逆であることから等角射影、つまり双曲面からも等角射影であることである。さらに P 直線、元は、双曲直線も、半球の xy 面との交線である大円に直交する平面との交線である小円 (もしくは大円) となる。

\mathbb{H} 上の点 r に対しそれを tr ($0 < t < 1$) と縮小したものがクライン円板上にあるとしよう。すると $tr \odot r_S = 1$ である。したがって $t = 1/(r \odot r_S)$ 。

なお、半球上の像を $z = 1$ の xy 面に、 z 軸と平行な線で正射影したものはクライン円板となる。

7.7 半平面モデル

点 $(1, 0, 0)$ を射影中心とし、半球面モデルを yz 面に立体射影したものを半平面モデル (half plain model) という。これも双曲面、ポアンカレ円板、半球面モデルと順に等角写像をしてきているので、等角性を保っている。また、双曲直線 P 直線は、境界と直交する半円 (もしくは直線) となる。

第 8 章

平面幾何学との関係

球面幾何学でも地球のように半径が大きな球であると、自分の身の周りの範囲ではユークリッド幾何学で議論してもほぼ問題ない。つまり球面幾何学を大きな半径の球面で議論し、その半径を巨大化すると、平面幾何学に一致するはずである。なお、半径や底の位置を今迄のように 1 にして、任意の点の極く近傍で議論しても、平面幾何学が得られる。本章では球面幾何学との関係を中心に論ずるが、双曲幾何学でも III の底の位置を巨大化すると、任意の位置付近では平面幾何学が成立する。ただし、本章では球面幾何学からの近似を中心に説明を行なう。双曲幾何学からもほとんど同じ手法で平面幾何学が近似できるが、それは読者にお任せする。

8.1 平面直線

球面幾何学から平面幾何学を論ずるには、次式に従う巨大球面 S_R を利用する。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

$R \rightarrow \infty$ で、平面に漸近する。

球面直線は次式で与えられる。

$$\mathbf{r}/R = \cos(s) \mathbf{w} + \sin(s) \mathbf{u}.$$

ここで、 $s = 0$ 付近に限定し、 s^2 以上の項を無視すると、次式のように近似できる。

$$\mathbf{r}/R = \mathbf{w} + s \mathbf{u}. \tag{8.1}$$

ただし、 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 1, \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ なる基底とする。(8.1) は平面直線を表わすとする。

同一平面内にある新たな次のようなベクトルを考えてみよう.

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} + s'\mathbf{u}. \quad (8.2)$$

これらも別の基底になることは, $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' = 1$, $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}' = 0$, $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' = 1$ となることから直ちに証明できる. ここでも, s'^2 以上の高次項は無視している.

再び s'^2 以上の高次項は無視して, (8.2) から逆に元の基底を, 新しい基底で表現してみよう.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' - s'\mathbf{u}'.$$

これを (8.1) に代入すると, s'^2 以上の高次項は無視して新しい基底で記述された \mathbf{r} の表現が得られる.

$$\mathbf{r}/R = \mathbf{w} + s\mathbf{u} = \mathbf{w}' + (s - s')\mathbf{u}'. \quad (8.3)$$

つまり, $s \rightarrow (s - s')$ とすれば, 新しい基底 \mathbf{w}' , \mathbf{u}' が使えるのである.

8.2 接線ベクトル

$\mathbf{r}/R = \mathbf{w} + s\mathbf{u}$ とし, $s \rightarrow s + ds$ としてみよう. この時, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ として, $d\mathbf{r}$ を求めてみよう. これを $ds\mathbf{t}/R$ と定義する.

$$d\mathbf{r}/R = (\mathbf{w} + (s + ds)\mathbf{u}) - (\mathbf{w} + s\mathbf{u}) = ds\mathbf{u} \quad (= ds\mathbf{t}/R).$$

つまり, s を増加すると移動していく方向であるので, \mathbf{t} は平面直線の接線の方向を向くベクトルである. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = R^2$ が成立するので, 次式で定義される \mathbf{t} は平面直線の接線ベクトル (tangent vector) である.

$$\mathbf{t}/R = \pm\mathbf{u}$$

接線の方向は二方向あるので \pm を付した (特に断わらない場合は, 正号, つまり s の増加につれ \mathbf{r} が動いていく方向). 球面幾何学や双曲幾何学では, 直線の接線の方向は場所ごとに異なるが, 平面幾何学では一定である. なお, $\mathbf{w} = \mathbf{r}/R$ とすれば, $\mathbf{u} = \mathbf{t}/R$ である.

接線ベクトルは, これから平面三角形のいくつかの定理を証明する際に, 積極的に利用される重要な概念である. A, B 二点の接線の向きを互いに対向するように \mathbf{t}_{AB} , \mathbf{t}_{BA} のように選択すれば,

$$\mathbf{t}_{AB} \cdot \mathbf{t}_{BA} = -R^2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -R^2.$$

である。

さて、平面上の二点 A, B の座標ベクトルは、これら二点を通過する平面直線を基準にすれば、共通の基底 \mathbf{w}, \mathbf{u} を用いて次のように記述することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A/R &= \mathbf{w} + s_A \mathbf{u}, \\ \mathbf{r}_B/R &= \mathbf{w} + s_B \mathbf{u}. \end{aligned}$$

これを \mathbf{w}', \mathbf{u}' を基底に替えると、(8.3) より、すべての s_A や s_B が s' だけ減ることは明かであろう。したがって、 $s_B - s_A$ は基底の取り方に依存せずに維持されることがわかる。つまり、 \mathbf{w}, \mathbf{u} の選択には大きな自由度があることが理解できよう。

8.3 平面線分の長さ

$s_B - s_A$ が基底の選択によらず維持されることから $s_B - s_A$ は A と B の間の平面直線、つまり平面線分 (planar line segment) の長さと強い関係を持っていることが予想される。実際、長さは (8.1) を利用して、次のようにして計算できる。

$$\int_A^B ds \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \int_A^B ds R |\mathbf{u}| = \int_A^B ds R = R |s_B - s_A|.$$

つまり平面線分の長さは $R |s_B - s_A|$ である。

8.4 平面直線間の角度

平面直線間の角度は、球面直線間の角度と同様に、平面直線の接線間の角度で定義できる。

\mathbf{w} の候補としては \mathbb{S} 上の任意の点を指すベクトルを採用した。 \mathbf{u} にはその点を起点とする任意方向の接線ベクトル \mathbf{t} がよいだろう。また、 \mathbf{v} の候補としてはこの二つのベクトルと直交する別の第三のベクトルがよいだろう。外積の概念があれば、 $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{t}$ のことである。

このように、平面幾何学は互いに直交する、 \mathbb{S} 内の $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ の合せて三つの単位ベクトルにより議論することができる。 \mathbf{w} は平面に垂直な単位ベクトル、 \mathbf{u} は任意の平面直線の接線、 \mathbf{v} はこの平面直線と直行する別の平面直線の接線である。

8.5 平面三角形と平面余弦定理

平面上の 3 点を 3 本の平面直線で結んだものを、**平面三角形** (planar triangle) といひ、それについて成立する**平面三角法** (planar trigonometry) について説明する。平面上の平面三角形の頂点を A, B, C 、各頂点における角度を A, B, C 、対する辺の長さを a, b, c とする。各辺の長さに対応する巨大球に対する角度はそれぞれ $a/R, b/R, c/R$ であることに注意してほしい。これらの角度は微量になるため、色々な近似が使える。平面三角形に関する諸定理は、この近似を利用する。なお、角度 A, B, C は微量にはならないことを銘記して式変形を行なう必要がある。

巨大球に関する球面余弦定理は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\cos(c/R) &= \cos(a/R) \cos(b/R) + \sin(a/R) \sin(b/R) \cos(C), \\ \cos(C) &= \frac{\cos(c/R) - \cos(a/R) \cos(b/R)}{\sin(a/R) \sin(b/R)}.\end{aligned}$$

$R \rightarrow \infty$ では、 $\cos(x/R) \rightarrow 1 - (x/R)^2/2$ と近似できるため、これらの式は以下のように変形でき、**平面余弦定理** (planar cosine theory) が得られる。

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(C), \\ \cos(C) &= \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2ab}.\end{aligned}$$

球面余弦定理から誘導される次式の**三角不等式** (triangle inequality) も成立する。

$$c < a + b.$$

ついでに、これから $\sin(C)$ も求めておこう。

$$\begin{aligned}\sin(C) &= \sqrt{1 - \cos^2(C)} = \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2ab}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2ab} \sqrt{(2ab)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2} = \frac{1}{2ab} \sqrt{[c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2]} \\ &= \frac{2}{ab} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{2S_P}{ab} \\ &\quad \text{where } s = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad \text{and} \quad S_P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.\end{aligned}$$

8.6 平面ピタゴラスの定理

$C = \angle C$ を直角とする球面直角三角形に対して成立する球面ピタゴラスの定理は巨大球面では以下のようなになる。

$$\cos(c/R) = \cos(a/R) \cos(b/R).$$

$$\sin(A) = \frac{\sin(a/R)}{\sin(c/R)}, \quad \sin(B) = \frac{\sin(b/R)}{\sin(c/R)}. \quad (8.4)$$

$$\cos(A) = \cos(a/R) \sin(B), \quad \cos(B) = \cos(b/R) \sin(A). \quad (8.5)$$

ここで x が小さい時の近似である $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$, $\sin(x) \approx x$ を適用する (第3式では $\cos(x) \approx 1$ と近似) と, 次の**平面ピタゴラスの定理** (planar Pythagorean theorem) が得られる。

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$\begin{aligned} \sin(A) &= \frac{a}{c}, & \sin(B) &= \frac{b}{c}. \\ \cos(A) &= \sin(B), & \cos(B) &= \sin(A). \end{aligned} \quad (8.6)$$

8.7 平面三角形の内角の和と面積

$\angle C$ の平面直角三角形に対する平面ピタゴラスの定理の (8.6) を利用し, 次の余弦加法定理の右辺を変形する。

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) = 0.$$

したがって $A + B = \pi/2$ となり, 平面直角三角形の残る二角の和は直角に等しいことが証明される。これより, 平面直角三角形を二つ合せた一般の**平面三角形内角の和** (sum of interior angles of a planar triangle) についても, 次式が成立する。

$$A + B + C = \pi.$$

巨大球の球面三角形の面積が内角和過剰量で与えられることを利用して, **平面三角形の面積** (area of a planar triangle) を算出してみよう。計算したいのは $A + B + C - \pi$ であるが, これが微量であることを考慮し, $\sin(A + B + C - \pi)$ で近似しよう。さらに, まず $\angle C$ が直角な直角三角形を対象としよう。

$$\begin{aligned}
\sin(A + B + C - \pi) &= \sin(A + B - \pi/2) = -\cos(A + B) \\
&= \sin(A)\sin(B) - \cos(A)\cos(B) \\
&= (1 - \cos(a/R)\cos(b/R)) \frac{\sin(a/R)}{\sin(c/R)} \frac{\sin(b/R)}{\sin(c/R)} \\
&\approx \frac{a^2 + b^2}{2R^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{2R^2}.
\end{aligned}$$

3行目へは、まず (8.5) を使い、さらに (8.4) を使っている。両辺に R^2 を乗じると、左辺はこの巨大球面上の三角形の面積 S 、右辺は良く知られた平面三角形の面積 $S_P = ab/2$ となるので、巨大球の球面直角三角形の面積 $R^2(A + B + C - \pi)$ が S_P に収束することが示された。

一般の巨大球の球面三角形については、例えば点 B から辺 AC に垂線を下ろし、二つの直角三角形に分離し、それぞれに対し上式が成立することから、一般に、

$$S_P = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2(A + B + C - \pi)$$

が得られる。なお、この証明を $\sin(A + B + C - \pi) = -\sin(A + B + C)$ から直接計算するのは容易ではない。それは、余弦定理で示した 2 次の微量量までの近似では右辺 0 となってしまう、4 次までの微量量の計算が必要となるが、それはかなりの作業量となるからである。

8.8 平面正弦定理

任意の巨大球の球面三角形 ABC に対し、以下の球面正弦定理が成立する。

$$\frac{\sin(a/R)}{\sin A} = \frac{\sin(b/R)}{\sin B} = \frac{\sin(c/R)}{\sin C}.$$

ここで a/R などが微量量であることを考慮すると、次の平面正弦定理 (planar sine theorem) が誘導できる。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

8.9 双対三角形

巨大球面における総体的に小さな三角形の双対三角形を考えよう。例えば、小さな三角形が地球で言えば北極付近にあるとすると、その 3 辺はいずれも経線に近い大円となる。

その大円に垂直な直径が球面と交わる点として定義される双対点は赤道付近に散在することとなる。

さて、球面幾何学と同様に、球面上の任意の球面三角形 ABC を考え、球面線分 BC (長さ a) と双対な点を A^* , 以下同様に B^* , C^* を定め、三角形 $A^*B^*C^*$ を ABC の双対球面三角形としよう。

双対球面三角形に成立する余弦定理を書き下すと、次式のように、元の三角形の辺の長さが頂点角に、頂点角が辺の長さ書き変わった式となる。

$$\begin{aligned}\cos(C) &= -\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)\cos(c/R), \\ \cos(c/R) &= \frac{\cos(C) + \cos(A)\cos(B)}{\sin(A)\sin(B)}.\end{aligned}$$

さて、 $R \rightarrow \infty$ とすると、

$$\cos(C) = -\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B).$$

これが言うなれば**双対平面余弦定理** (dual planar cosine theorem) であるが、右辺が $-\cos(A+B)$ になるので、 $C = \pi - A - B$ と同じ意味になっている。

なお、双対三角形の概念は平面三角形に厳密にはない。平面三角形はそのサイズに比較し巨大な球面上の球面三角形で近似できるが、双対な三角形は非常に巨大となり、永遠の彼方に発散してしまうからである。

第 9 章

座標変換

9.1 計量，内積，計量テンソル

改めて，計量とは何かというと，距離を定義するものであり，さらに広く，それに関係する種々の幾何学的構造を含有する概念といえる．一般に，曲線に沿った計量の概念を考えると，間の非常に空いた 2 点間の距離というのは考えづらい．そこで，普通は近接した 2 点間の距離を議論する．遠距離はその積分で議論する．2 点を結ぶ座標の差 dx_i に対し，計量は一般的に次のように表わされる．

$$\sum_{ij} dx_i g_{ij} dx_j = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = d\mathbf{x}^T \{g\} d\mathbf{x}$$

g_{ij} は計量テンソル (metric tensor) と呼ばれ，二次元のユークリッド計量であると，diag を対角テンソルとして， $g_{mn} = \text{diag}(1, 1)$ であり，ミンコフスキー計量であると， $g_{mn} = \text{diag}(1, -1)$ である．

9.2 球面幾何学における座標変換

\mathbb{R}^3 における任意の点 (\mathbb{S} に限っていないことに注意) に対応する座標ベクトルを \mathbf{r} とする時，これを球面幾何学における基底 $\{\mathbf{u}_i\} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ を使って次のように表わそう．

$$\mathbf{r} = \sum_i X_i \mathbf{u}_i.$$

ただし $\{X_i\} = (X, Y, Z)$ である。この式の両辺に \mathbf{u}_j ($j = 1, 2, 3$) を順に乘じる (内積を作る) ことにより, 次式が得られる。ただし, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ を利用する。

$$X_j = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_j.$$

したがって, 次のように書ける。

$$\mathbf{r} = \sum_j (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j.$$

さて, 別の基底 \mathbf{u}'_i を考えよう。これらのベクトルも, \mathbf{u}_j で表現することができる。それらの成分を $\{a_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) で表わすと,

$$\mathbf{u}'_i = \sum_j a_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_j (\mathbf{u}'_i \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j.$$

$$x = a \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a \cos \theta$$

したがって反変順変換係数 $\partial_{\mu'}^M$ は次式で与えられる。

$$\{\partial_{\mu'}^M\} = \begin{pmatrix} \partial_{\theta}^x & \partial_{\phi}^x \\ \partial_{\theta}^y & \partial_{\phi}^y \\ \partial_{\theta}^z & \partial_{\phi}^z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ & = a^2 \text{diag}(1, \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$\rho = \sin \theta$ とすると,

$$x = a \rho \cos \phi$$

$$y = a \rho \sin \phi$$

$$z = a \sqrt{1 - \rho^2}$$

したがって反変順変換係数 $\partial_{\mu'}^M$ は次式で与えられる。

$$(\{\partial_{\mu'}^M\}) = \begin{pmatrix} \partial_{\rho}^x & \partial_{\phi}^x \\ \partial_{\rho}^y & \partial_{\phi}^y \\ \partial_{\rho}^z & \partial_{\phi}^z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a^2 \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{pmatrix} \\ & = a^2 \text{diag}\left(\frac{1}{1-\rho^2}, \rho^2\right) \end{aligned}$$

第 10 章

相対論と双曲幾何学

特殊相対性理論 (special theory of relativity) (以下, 単に相対論 (theory of relativity) という) は双曲幾何学と強い関係を持っている. しかし, 相対論では平行線が無数に引けるという概念も双曲三角形も現われない. 本書では物理現象にあまり深入りすることなく, 簡単に両者の関連について説明を行なう.

10.1 相対論における座標変換

移動する座標系 S' の運動を静止する座標系 S から見たらどう見えるだろうか. 具体的には, 電車 (S') の中で (x', t') の座標が地上 (S) から見るとどんな座標 (x, t) に見えるかという課題である. 直観的な関係は次式で表わされるだろう.

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

つまり, 電車中で時刻 t' に起きた事象は外から見ても同時刻に観測されるし, 電車に固定された位置座標 x' の事象は電車の速度 v とする時, 電車の原点が vt で増えていくので, その分だけ大きな値として観測される. これより, 次の変換式が得られる.

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

これが**ガリレイ変換** (Galilei transformation) と呼ばれるものである。この式の通りだとすると、車内の座標で $x' = V't'$ で動いている物体は、外からは $V' + v$ で動いているように見えるはずであり、我々の直観を裏切らない、

ところが、実験によると、車内で $V' = c$ で走る光は外から見ても c の速度で走ることが確認された。このため、ガリレイ変換には何らかの修正が必要となったのである。そこで**アインシュタイン** (Einstein) は次のような仮説により新しい変換則を導出した。

1. 実験の結果は、どんな方向に向う光の速度も、いかなる系でも c になるというものであった。もし、 S' 系で $t' = 0$ に原点で光が四方八方に放出されたとすると、その波面は $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ に従うが、それを S 系で見た場合、 $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ に従わなければならない。
2. 移動する座標も静止している座標も全く対等である。
 - (a) ガリレイ変換と同様に、 $y' = y, z' = z$ が成立する。
 - (b) S' 系の原点 $x' = 0$ は S 系では $x = vt$ で移動し、逆に S 系の原点 $x = 0$ は S' 系では $x' = -vt$ で移動するように見えるはずである。

ここでまず仮説 2 より、動系、静止系という概念は消失し、 S 系も S' 系も共に**慣性系** (inertial system) と呼ばれ、互いに v の速度で離れていく系である。仮説 2 の各小項より、次の変換式が仮定できる。

$$\begin{aligned}x' &= A(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= At - Bx\end{aligned}$$

これらの変換式を $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$ に代入してみよう。さらに、仮説 1 より、

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= A^2 x^2 - 2A^2 vxt + A^2 v^2 t^2 + y^2 + z^2 - A^2 c^2 t^2 + 2ABc^2 xt - B^2 c^2 x^2 \\&= (A^2 - B^2 c^2)x^2 + 2A(Bc^2 - Av)xt + y^2 + z^2 - A^2(c^2 - v^2)t^2 \\& \qquad \qquad \qquad (= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)\end{aligned}$$

これより、 $A = \gamma, B = Av/c^2$ が得られる。ただし $\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ である。し

たがって、最終的な変換式として次式が得られる。

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\y' &= y \\z' &= z \\ct' &= \gamma(ct - \beta x)\end{aligned}$$

また、逆変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + \beta ct') \\y &= y' \\z &= z' \\ct &= \gamma(ct' + \beta x')\end{aligned}$$

索引

■ A

- area of a hyperbolic triangle (双曲三角形の面積) 33
 area of a planar triangle (平面三角形の面積) 53
 area of a spherical triangle (球面三角形の面積) 13
 axiom (公理) 1
 axiom of Archimedes (アルキメデスの公理) . 2
 axiom of Pasche (パッシェの公理) 2
 axiom of Playfair (プレイフェアの公理) 2

■ C

- central projection (中心射影) 18
 conformal (等角) 20
 congruence axiom (合同の公理) 2
 continuity axiom (連続の公理) 2

■ D

- double ratio (複比) 38
 dual (双対) 15, 34
 dual hyperbolic cosine theorem (双対双曲余弦定理) 34
 dual hyperbolic triangle (双対双曲三角形) . 34
 dual planar cosine theorem (双対平面余弦定理) 55
 dual spherical cosine theorem (双対球面余弦定理) 15
 dual spherical triangle (双対球面三角形) ... 15

■ E

- E \rightarrow Euclidean 6
 E angle (E 角度) 6
 E distance (E 距離) 7
 E inner product (E 内積) 6
 E length (E 長さ) 6
 E metric (E 計量) 6
 E norm (E ノルム) 6
 E normal (E 法線) 16
 E orthogonal, E right-angled (E 直交) 7
 E outer product (E 外積) 16

- E perpendicular line (E 垂線) 14
 E right-angled \rightarrow E orthogonal 7
 E space (E 空間) 7
 Einstein (アインシュタイン) 60
 Euclidean (adj.) (ユークリッド (形)) 6
 Euclidian geometry (ユークリッド幾何学) ... 1
 Eukleides (Eng.)Euclid (エウクレイデス) ... 1

■ G

- Galirei transformation (ガリレイ変換) 60
 gnomonic projection (心射図法) 18

■ H

- H \rightarrow hyperbolic 22
 H angle (H 角度) 30
 H base (H 基底) 25
 H distance (H 距離) 26
 H length (H 長さ) 29
 half plain model (半平面モデル) 48
 hemisphere model (半球面モデル) 47
 Heron's formula (ヘロンの公式) 5
 Hilbert (ヒルベルト) 1
 hyperbolic (adj.) (双曲 (形)) 22
 hyperbolic cosine theorem (双曲余弦定理) . 31
 hyperbolic function (双曲線関数) 23
 hyperbolic geometry (双曲幾何学) 22
 hyperbolic line (双曲直線) 25
 hyperbolic line segment (双曲線分) 28
 hyperbolic Pythagorean theorem (双曲ピタゴラスの定理) 31
 hyperbolic sine theorem (双曲正弦定理) ... 33
 hyperbolic triangle (双曲三角形) 30
 hyperbolic trigonometry (双曲三角法) 30
 hyperboloid of one sheet (一葉双曲面) 22
 hyperboloid of two sheets (二葉双曲面) ... 22
 H 長さ (H length) 29

■ I

- image (像) 18, 37, 43
 incidence axiom (結合の公理) 2

- inertial system (慣性系) 60
- K
Klein disk (クライン円板) 38
- M
M \rightarrow Minkowski 22
M inner product (M 内積) 24
M length (M 長さ) 24
M metric (M 計量) 24
M norm (M ノルム) 24
M normal (M 法線) 35
M orthogonal, M right-angled (M 直交) ... 24
M outer product (M 外積) 35
M perpendicular line (M 垂線) 34
M right-angled \rightarrow M orthogonal 24
M space (M 空間) 24
mapping (写像) 18
metric tensor (計量テンソル) 56
Minkowski (ミンコフスキー) 22
- N
non Euclidian geometry (非ユークリッド幾何学)
1
- O
optical cone (光円錐) 23
order axiom (順序の公理) 2
orthographic projection (正射図法) 19
orthographic projection (正射影) 19
orthomorphic projection (平射図法) 19
- P
parallel axiom (平行線の公理) 2
planar cosine theorem (平面余弦定理) 5
planar cosine theory (平面余弦定理) 52
planar line segment (平面線分) 51
planar Pythagorean theorem (平面ピタゴラスの定理) 4, 53
planar sine theorem (平面正弦定理) 5, 54
planar triangle (平面三角形) 4, 52
planar trigonometry (平面三角法) 4, 52
Poincarè disk (ポアンカレ円板) 43
projection (射影) 18
proof (証明) 1
Pythagorean theorem (ピタゴラスの定理) ... 4
- R
right-angled hexagon (直角六角形) 41
right-angled pentagon (直角五角形) 40
- S
S \rightarrow spherical 6
S angle (S 角度) 11
S base (S 基底) 7
S length (S 長さ) 10
special theory of relativity (特殊相対性理論) 59
spherical (adj.) (球面 (形)) 6
spherical cosine theorem (球面余弦定理) ... 12
spherical geometry (球面幾何学) 6
spherical line (球面直線) 6, 7
spherical line segment (球面線分) 10
spherical Pythagorean theorem (球面ピタゴラスの定理) 12
spherical sine theorem (球面正弦定理) 14
spherical triangle (球面三角形) 11
spherical trigonometry (球面三角法) 11
stereographic projection (立体射影) 19
sum excess of inner angles (内角和過剰量) . 14
sum of interior angles of a hyperbolic triangle (双曲三角形内角の和) 32
sum of interior angles of a planar triangle (平面三角形内角の和) 53
sum of interior angles of a spherical triangle (球面三角形内角の和) 13
sum shortage of inner angles (内角和不足量) 33
S 長さ (S length) 10
- T
tangent vector (接線ベクトル) 8, 27, 50
theorem (定理) 1
theory of relativity (相対論) 59
triangle inequality (三角不等式) ... 12, 31, 52
trigonometric addition formula (三角法加法定理) 4
- U
undefined terms (無定義語) 1
- あ
アインシュタイン (Einstein) 60
アルキメデスの公理 (axiom of Archimedes) . 2
E \rightarrow ユークリッド (形) 6
E 外積 (E outer product) 16
E 角度 (E angle) 6
E 距離 (E distance) 7
E 空間 (E space) 7
E 計量 (E metric) 6
E 垂線 (E perpendicular line) 14
E 直交 (E orthogonal, E right-angled) 7
E 内積 (E inner product) 6
E 長さ (E length) 6
E ノルム (E norm) 6
E 法線 (E normal) 16
一葉双曲面 (hyperboloid of one sheet) 22
エウクレイデス (Eukleides (Eng.)Euclid) 1
H \rightarrow 双曲 (形) 22
H 角度 (H angle) 30

- H 基底 (H base) 25
H 距離 (H distance) 26
S \rightarrow 球面 (形) 6
S 角度 (S angle) 11
S 基底 (S base) 7
M \rightarrow ミンコフスキー 22
M 外積 (M outer product) 35
M 空間 (M space) 24
M 計量 (M metric) 24
M 垂線 (M perpendicular line) 34
M 直交 (M orthogonal, M right-angled) ... 24
M 内積 (M inner product) 24
M 長さ (M length) 24
M ノルム (M norm) 24
M 法線 (M normal) 35
- か
- ガリレイ変換 (Galilei transformation) 60
慣性系 (inertial system) 60
球面 (形) (spherical (adj.)) 6
球面幾何学 (spherical geometry) 6
球面三角形 (spherical triangle) 11
球面三角形内角の和 (sum of interior angles of a spherical triangle) 13
球面三角形の面積 (area of a spherical triangle) 13
球面三角法 (spherical trigonometry) 11
球面正弦定理 (spherical sine theorem) 14
球面線分 (spherical line segment) 10
球面直線 (spherical line) 6, 7
球面ピタゴラスの定理 (spherical Pythagorean theorem) 12
球面余弦定理 (spherical cosine theorem) ... 12
クライン円板 (Klein disk) 38
計量テンソル (metric tensor) 56
結合の公理 (incidence axiom) 2
光円錐 (optical cone) 23
合同の公理 (congruence axiom) 2
公理 (axiom) 1
- さ
- 三角不等式 (triangle inequality) ... 12, 31, 52
三角法加法定理 (trigonometric addition formula) 4
射影 (projection) 18
写像 (mapping) 18
順序の公理 (order axiom) 2
証明 (proof) 1
正射影 (orthographic projection) 19
正射図法 (orthographic projection) 19
接線ベクトル (tangent vector) 8, 27, 50
像 (image) 18, 37, 43
双曲 (形) (hyperbolic (adj.)) 22
双曲幾何学 (hyperbolic geometry) 22
双曲三角形 (hyperbolic triangle) 30
- 双曲三角形内角の和 (sum of interior angles of a hyperbolic triangle) 32
双曲三角形の面積 (area of a hyperbolic triangle) 33
双曲三角法 (hyperbolic trigonometry) 30
双曲正弦定理 (hyperbolic sine theorem) ... 33
双曲線関数 (hyperbolic function) 23
双曲線分 (hyperbolic line segment) 28
双曲直線 (hyperbolic line) 25
双曲ピタゴラスの定理 (hyperbolic Pythagorean theorem) 31
双曲余弦定理 (hyperbolic cosine theorem) . 31
相対論 (theory of relativity) 59
双対 (dual) 15, 34
双対球面三角形 (dual spherical triangle) ... 15
双対球面余弦定理 (dual spherical cosine theorem) 15
双対双曲三角形 (dual hyperbolic triangle) . 34
双対双曲余弦定理 (dual hyperbolic cosine theorem) 34
双対平面余弦定理 (dual planar cosine theorem) 55
- た
- 中心射影 (central projection) 18
心射図法 (gnomonic projection) 18
直角五角形 (right-angled pentagon) 40
直角六角形 (right-angled hexagon) 41
定理 (theorem) 1
等角 (conformal) 20
特殊相対性理論 (special theory of relativity) 59
- な
- 内角和不足量 (sum shortage of inner angles) 33
内角和過剰量 (sum excess of inner angles) . 14
二葉双曲面 (hyperboloid of two sheets) ... 22
- は
- パッシェの公理 (axiom of Pasche) 2
半球面モデル (hemisphere model) 47
半平面モデル (half plain model) 48
ピタゴラスの定理 (Pythagorean theorem) ... 4
非ユークリッド幾何学 (non Euclidian geometry) 1
ヒルベルト (Hilbert) 1
複比 (double ratio) 38
プレイフェアの公理 (axiom of Playfair) 2
平行線の公理 (parallel axiom) 2
平射図法 (orthomorphic projection) 19
平面三角形 (planar triangle) 4, 52
平面三角形内角の和 (sum of interior angles of a planar triangle) 53
平面三角形の面積 (area of a planar triangle) 53
平面三角法 (planar trigonometry) 4, 52
平面正弦定理 (planar sine theorem) 5, 54

平面線分 (planar line segment)	51	無定義語 (undefined terms)	1
平面ピタゴラスの定理 (planar Pythagorean theorem)	4, 53	■ や	
平面余弦定理 (planar cosine theorem)	5	ユークリッド (形) (Euclidean (adj.))	6
平面余弦定理 (planar cosine theory)	52	ユークリッド幾何学 (Euclidian geometry) ...	1
ヘロンの公式 (Heron's formula)	5	■ ら	
ポアンカレ円板 (Poincarè disk)	43	立体射影 (stereographic projection)	19
■ ま		連続の公理 (continuity axiom)	2
ミンコフスキー (Minkowski)	22		