三角錐の体積

岡部 洋一
放送大学教授 (東京大学名誉教授)

2016 年 6 月 19 日
起草: 2016 年 5 月 24 日

0.1 はじめに

たぶん、10 年振りぐらいではないだろうか。東大名誉教授の和田英一先生にお会いして夕食をご一緒にさせていただいた時の雑談で、「三角錐の体積が三角柱の体積の 1/3 になるのを、積分を使わないで説明できそうとは思わないか」というお話が出た。「もちろん、拡張すれば、いかなる錐でも柱の 1/3 になるし、球の体積に 4/3 が出てくることも説明できるんだよね」と続いた。

そこで、突然頭に横切ったのが、これは私の課題でもあったんだという記憶である。実は小学生高学年のころに読んだ数学の導入本で、「三角柱から三角錐を一つ切り取る。さらに上下反対向きの三角錐をもう一つ切り取る。すると残った少し妙な形の立体の体積はちょうど三角錐の体積と一致する。したがって三角錐の体積は三角柱の体積の 1/3 になる。」という記述があった。当時の私の知識では、この記述がどうしてもうまく理解できず、ずいぶん長く尾を引いたのである。結局、三角錐の体積は、後に積分の登場で理解できるようになったが、喉に骨の引っ掛かったような気分であった。

その話が、再度登場したのである。今の自分なら、より深い考察が可能であろうと、考えたら、一時間もしないで答が得られた。ただし、何故、当時、いくら考えても答が得られなかったかもよく理解できた。なお、若干の積分的概念知識が必要である。

もちろん、喉に引っ掛かった骨は取れたのである。

0.2 体積の変らない変形

柱でも錐でも高さを変えないで、上面や頂点を底面に平行にずらす変形は、体積を変えない変形である。実は、当時の私はこの辺りを不確かにしたまま、理解しようとしなので、喉骨状態だったのである。任意の立体の体積はそれを平行に薄く輪切りに切離し、その薄い輪切りの体積の合計で与えら

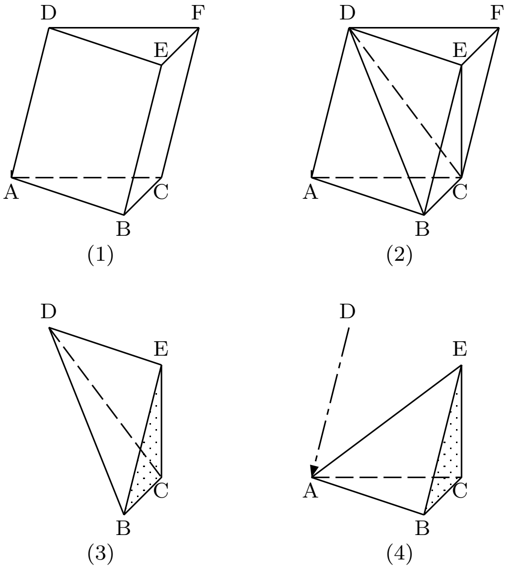

図 1　三角錐の体積: (1) 三角柱 (2) 三角錐 2 個を切り取る (3) 残った部分 (4) 陰影面に平行に頂点 D を移動すると、三角錐がもう一つできる

れる。輪切りの体積は、その厚さが十分薄ければ、輪切りの断面積と (薄い) 高さの積でよく近似できる。これを発展させると、(リーマン) 積分という概念に繋がるのである。このことから、各高さにおける輪切りの断面積を変えないで立体を変形しても、体積は変らないことがわかる。このことから、例えば、柱でも錐でも高さを変えないで、上面や頂点を底面に平行にずらす変形は、体積を変えない変形であることが誘導できる。

0.3　三角錐の体積

三角柱に同じ体積の三角錐が三個入ることを示すことができる。図 1 の (1) に三角柱を示す。図のように、三角柱は傾むいていてもよい。(2) のように、この三角柱の底面と上にある頂点の一つ (この例では D) を選んで三角

錐を一つ作る。さらに、上面と下の頂点の一つ (ここでは C) を選んで、二つ目の三角錐を作る。残った部分は (3) に示すようやや複雑な四面体 BCDE である。ここで、ハッチを付けた BCE) を底面と思い、残る頂点である D を底面に平行な面内で移動して、(4) に示す A まで持ってきても、その体積は変わない。

最初に切り出した二つの三角錐と (4) に示した三角錐はいずれも柱と等しい底面積および高さを有し、三つの体積は互いに等しい。つまり、一つの三角錐の体積は三角柱の体積の 1/3 となる。

0.4 任意の錐の体積

[*1]

まず、多角形の底面を持つ錐の体積を示そう。底面を小さな三角形で分割しておく。すると、任意の錐は細い三角錐の集合になる。各細い錐の体積はそれぞれ底面積と高さの積の 1/3 になる。したがって、全体の体積は全底面積と高さの積の 1/3 になる。

底面が任意形状の場合にも、その底面を任意の小三角形で分割する。分割を細くすればするほど、任意形状はよく近似されていく。したがって、任意の錐の体積も、全底面積と高さの積の 1/3 になる。

0.5 球の体積

半径 R の「半球」の体積を求めてみよう。この半球を、半球の底面と同じ底面を持ち、同じ高さを有する円柱で囲ってみる。高さ x における断面を考え、そこでの二つの図形の断面積を調べてみよう。半球の断面の半径は $\sqrt{1-(x/R)^2}R$ になるので、断面積は $\pi R^2[1-(x/R)^2]$ で与えられ

[*1] 当初、筆者はこの体積をやや積分の概念の強い方法で示したが、この書き物を和田先生にお見せしたところ、以下の別説明にした方がよいのではというお薦めがあったので、それを示す。

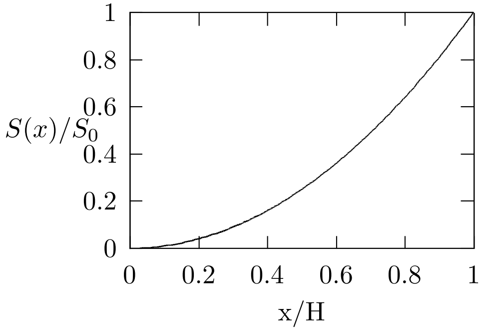

図 2　底面からの高さに対する輪切りの断面積の変化

る。一方、円柱の断面積は πR^2 である。面白いのは、その差 $\pi R^2(x/R)^2$ である。この値は、丁度、同じ底面で高さ R の倒立した円錐の断面積に等しい。つまり底面と平行となる任意の断面積で、円柱から倒立円錐を引いたものは半球になっていることがわかる。これより、半球の体積は $(2/3)\pi R^3 HS_0 = (2\pi/3)R^3$、全球にすれば $(4\pi/3)R^3$ が得られる。

0.6　定積分との関係

任意の形状の底面から構成された錐の底面と平行な面での断面積は、錐の先端から輪切りまでの距離の二乗に比例して変化する。先端から底面までの距離を H、底面の面積を S_0 とすると、先端から x 離れた輪切りの断面積 $S(x)$ は次式で与えられる。

$$S(x) = S_0 \left(\frac{x}{H}\right)^2 = \frac{S_0}{H^2}x^2 \tag{1}$$

この関係を図 **2** に示す。

$x = 0$ から x までの高さで囲まれた円錐の体積 $V(x)$ を、$S(x)$ の積分と

呼ぶ。

$$V(x) = \frac{1}{3} S_0 H \left(\frac{x}{H} \right)^3 = \frac{1}{3} \frac{S_0}{H^2} x^3 \tag{2}$$

これから、x^2 の積分は $x^3/3$ であることが誘導できる。

n 次元錐のようなものの n 次元体積を考えると、n 次元柱の n 次元体積の $1/n$ になる。このことから、x^{n-1} の積分は x^n/n となることが誘導できる。しかし、三次元以上の次元の物体を想像するよりは、リーマン積分の手法で考察する方が遥かに楽であるので、ここでは詳細説明は省く。